This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

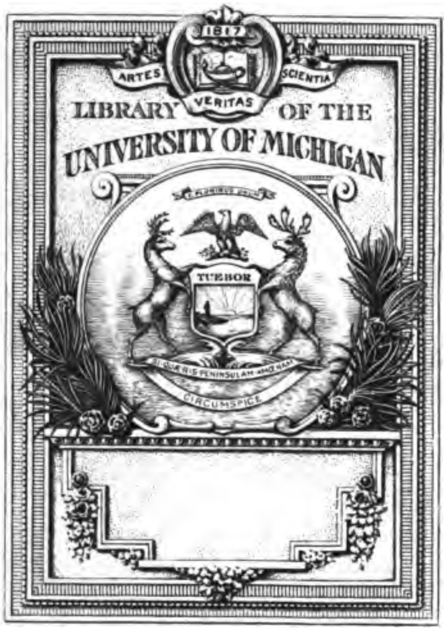
+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

QA
551
.G236
1813

Half-T[illegible] [illegible] paper.



GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

OU

APPLICATION DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE;

Par J. G. GARNIER, ancien Professeur à l'École Polytechnique, Docteur ès-Sciences, et Instituteur à Paris.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Lib. pour les Mathématiques quai des Augustins, n° 57.

1813.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

QUI SE TROUVENT A LA MÊME ADRESSE.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Élèves de tout âge, comprenant l'Arithmétique des Grecs, seconde édition, 1 vol. in-8°.

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des aspirans à l'École Impériale Polytechnique, première section, troisième édition, 1 vol. in-8°.

SECONDE SECTION DE L'ALGÈBRE, seconde édition, 1 vol. in-8°.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec les deux Trigonométries, suivies d'une introduction à la Géométrie descriptive, et de notions sur la Polygonométrie et le levé des Plans, 1 vol. in-8°, avec 12 planches.

LES RÉCIPROQUES DE LA GÉOMÉTRIE, suivies d'un recueil très-étendu de théorèmes et de problèmes, seconde édition, 1 vol. in-8°, avec 9 planches.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou application de l'Algèbre à la Géométrie, seconde édition, 1 vol. in-8°, avec 10 planches.

LEÇONS DE STATIQUE, 1 vol. in-8°, avec 12 planches.

LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, troisième édition, 1 vol. in-8°, avec 4 planches.

LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, troisième édition, 1 vol. in-8°, avec 2 planches.

OUVRAGE SUR LE COMPAS DE PROPORTION, suivi d'un Traité de la division des champs, in-12.

RECHERCHES ANALYTIQUES, consignées dans un ouvrage sur la Courbe trisectrice, faisant avec l'ouvrage 1 vol. in-8° contenant 3 planches.

NOTES sur l'Algèbre de Bezout, faisant avec l'Algèbre 1 vol. in-8°.

NOTES sur le premier volume de l'Algèbre d'Euler; le second volume contient le notes du sénateur Lagrange.

AVERTISSEMENT.

La première Édition de cet Ouvrage manque de méthode, et conséquemment de ce qui fait le principal mérite d'un livre élémentaire : elle laisse à desirer plusieurs formules qui, sans être exclusivement préférables à d'autres, les remplacent avantageusement dans la résolution d'un grand nombre de questions ; quelques solutions ne sont pas complètes ou assez approfondies, d'autres sont pénibles ; les problèmes de l'espace sont mêlés avec les problèmes à deux dimensions ; enfin la notation est souvent défectueuse.

Ainsi regardant ce premier travail comme non-avenu, j'ai refait un nouveau Traité plus méthodique, plus soigné et plus complet, où j'ai mis à profit les précieux matériaux que j'ai trouvés dans les Annales Mathématiques, rédigés par M. Gergonne, professeur au Lycée de Nismes ; dans les Élémens d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique, appliquées à la recherche des lieux géométriques, par M. Simon Lhuillier, professeur à l'Académie de Genève ; dans le Recueil de diverses propositions de Géométrie, par M. Puissant, recueil qui se recommande par le choix des questions et l'élégance des solutions ; et enfin dans quelques Mémoires sur différens

points d'analyse, répandus dans les Journaux de Sciences.

C'est dans la partie de ce Traité qui s'applique à l'espace, et qui comprend six des vingt-un chapitres de l'Ouvrage, qu'on trouvera les additions les plus notables, et, entr'autres, celles d'un beau Mémoire de M. le professeur Bourdon, ayant pour titre : *Détermination des axes principaux dans les surfaces du second degré, et, en particulier, dans celles de ces surfaces qui sont de révolution.*

Cette nouvelle rédaction, terminée depuis long-temps, a été soumise à l'épreuve de l'enseignement, très-propre à dissiper les illusions de l'amour-propre, et à faire ressortir les défauts d'une composition. Je pense donc que ce Traité pourra, dans l'état où il est, se soutenir auprès de ceux de MM. Lacroix, Biot, Le Français, Poulet-Delille et Boucharlat, auxquels je me plais à payer le tribut de reconnaissance que je leur dois pour les emprunts que je leur ai faits.

ERRATA.

Pag.	Lig.	Fautes.	Corrections.
13	27	$x=\frac{h}{c-h}$	$x=\frac{ch}{c-h}$.
41	11	$x=\frac{x''+x''}{3}$	$x=\frac{x''+x'''}{3}$.
44	8	A étant la tangente........	a étant la tangente.
56	14	$\frac{\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}$	$\sin\alpha=\frac{\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}$.
59	10	$AP=x'$	$AP'=x'$.
74	9	$Ba=-\sqrt{\frac{a}{3}},\ B'a'=\sqrt{\frac{a}{3}}$...	$Ba=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}},\ B'a'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$.
99	19	$\frac{-n+\sqrt{}}{2}$	$\frac{-n\pm\sqrt{}}{2}$.
108	11	y^2-	$9y^2-$.
119	21	$(A-C)\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha$...	$(A-C)\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0$.
133	dern.	$y=\frac{1}{\sqrt{8}}x$	$y^2=\frac{1}{\sqrt{8}}x$.
143	17	$AB=\sin(\alpha'''-\alpha'')$	$AB=\sin(\alpha'''-\alpha'')\ A''B''$.
147	14	Si dans l'équation (20)........	Si dans l'équation (21).
161	17	$=-\frac{2Nx'+Q}{2My'}$	$=-\frac{2Nx'+Q}{2M}$.
171	20	x^{1v} et y^{1v}	x^{1v} et $y^{1v}=0$.
173	7	$+C(h+k)$	$c(h+k)$.
179	12	$r^2=(y-y')+$	$r^2=(y-y')^2+$.
208	dern.	la corde AN........	la corde A'N.
221	3	capable d'un angle........	capable de l'angle.
222	19	$a<-\frac{2BA}{A^2-B^2}$	$a>-\frac{2BA}{A^2-B^2}$.
245	17	A^2y-	A^2y^2-.
248	6	$aa'=+\frac{B^2}{A}$	$aa'=+\frac{B^2}{A^2}$.
287	19	semblables DPB........	semblables DPb.
352	av. d.	$=x'^2+y'^2+z+z'^2+$	$=x'^2+y'^2+z'^2+$.
410	7	de N en C........	de N en C (fig. 175).
412	11	(fig. 176)........	(fig. 176.).

Hist. of sci.
Lib. of sci.
6-24-38
36524

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

CHAPITRE I.

Constructions géométriques et problèmes déterminés.

1. LORSQU'UN problème de géométrie est énoncé, on le suppose résolu, et en faisant usage des théorèmes de la géométrie, on lie les quantités ou lignes inconnues avec les lignes connues par des équations qui servent à évaluer les lignes cherchées au moyen de celles qui sont données, et qu'on a représentées les premières par x, y, z, etc., les secondes par a, b, c, etc., suivant les conventions faites en algèbre ; il reste alors à effectuer géométriquement les opérations indiquées par les formules des inconnues : c'est ce qu'on appelle *construire* les valeurs des inconnues.

Les questions de géométrie sont, comme les questions de nombres, déterminées ou indéterminées : dans le premier cas, elles peuvent donner lieu à plusieurs équations qui renferment alors le même nombre d'inconnues. Dans ce chapitre où nous ne traiterons que des questions déterminées, nous ne supposerons qu'une inconnue, parce que, s'il y en avait un plus grand nombre, on construirait chacune des autres suivant les mêmes principes.

2. Proposons-nous, en premier lieu, de construire des formules monômes, telles que

$$x=\frac{ab}{c},\quad x=\frac{abc}{de},\quad x=\frac{abcd}{efg},\quad \text{etc.},$$

dans lesquelles le nombre des facteurs linéaires du numérateur, excède d'une unité le nombre des facteurs linéaires du dénominateur ; ensorte que toutes ces fractions représentent une ligne.

La première représente une quatrième proportionnelle aux trois lignes données c, a et b, qu'on sait construire. *(Géom.)*

Pour construire la seconde, on cherchera une ligne $k=\frac{ab}{d}$, et on aura $x=\frac{kc}{e}$: ainsi deux quatrièmes proportionnelles donneront x.

La construction de la troisième exige celles de

$$k=\frac{ab}{e},\quad l=\frac{kc}{f},\quad x=\frac{ld}{g},$$

et ainsi des autres.

La construction de $x=\frac{a^2-b^2}{c}$ peut être ramenée à la recherche d'une quatrième proportionnelle, en écrivant

$$x=\frac{(a+b)(a-b)}{c}.$$

3. Soit, en second lieu,

$$x=\frac{abc+def-ghi}{lm},$$

qui revient à

$$x=\frac{abc}{lm}+\frac{def}{lm}-\frac{ghi}{lm}:$$

après avoir construit chacune de ces fractions comme on vient de l'enseigner, on ajoutera les deux premières lignes, et de la somme on retranchera la troisième.

Si le dénominateur seul est complexe, ainsi qu'il arrive dans la fraction

$$x = \frac{def}{ab + cd},$$

on le rendra monome en égalant le dénominateur qui est une somme de rectangles, au rectangle ay de deux lignes dont l'une a est donnée, et l'autre y est inconnue; ensorte qu'on aura

$$ab + cd = ay, \qquad \text{d'où} \qquad y = b + \frac{cd}{a},$$

et après avoir trouvé y, on construira, d'après ce qui précède,

$$x = \frac{def}{ay}.$$

On s'y prendrait de la même manière pour construire

$$x = \frac{abc + def}{ab + cd}.$$

Passons à la formule

$$x = \frac{abc^2 + hq^3 - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$$

qui représente toujours une ligne, parce que le numérateur est un polynome du quatrième degré, et le dénominateur du troisième : on posera le dénominateur

$$q^2i - klq + cmd = q^2y;$$

d'où l'on tire, en divisant par q^2,

$$i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2} = y:$$

cette valeur de y construite, on trouvera facilement la ligne

$$x = \frac{abc^2}{q^2y} + \frac{hq}{y} - \frac{m^3p}{q^2y}.$$

Dans les cas semblables, un choix convenable du facteur

de y, rend la construction plus simple, et conséquemment plus élégante.

4. Ces principes suffisent pour la construction des formules rationnelles. Nous passerons aux formules radicales qu'on peut toujours ramener aux deux suivantes,

$$x = \sqrt{ab}, \qquad x = \sqrt{a^2 \pm b^2}.$$

L'expression $\sqrt{ab}$ représente une moyenne proportionnelle entre a et b, qu'on peut trouver de diverses manières au moyen du cercle. La ligne $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ est, comme on le sait, l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont a et b sont les deux côtés de l'angle droit. Pour construire $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, on décrira (fig. 1) sur BC $= a$, comme diamètre, une demi-circonférence; de B, comme centre, avec BA $= b$, comme rayon, on décrira un arc qui coupera cette demi-circonférence en A, et la corde supplémentaire AC $= \sqrt{a^2 - b^2}$.

Soit la formule

$$x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}},$$

qui représente toujours une ligne, parce que la quantité sous le radical n'étant que de deux dimensions, la racine carrée n'en a qu'une. On fera

$$\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b^2}{b + c} + \frac{cd^2}{(b + c)a};$$

on construira donc y par une troisième et deux quatrièmes proportionnelles, ce qui changera la proposée dans celle-ci,

$$x = \sqrt{ay}.$$

Soit, en second lieu, la formule

$$x = \sqrt{a^2 \pm bc};$$

en posant $y^2 = bc$, on a

$$x = \sqrt{a^2 \pm y^2}:$$

ainsi une moyenne proportionnelle donne $y = \sqrt{bc}$, et le triangle rectangle donne x.

Pour construire

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

on porte à angles droits (fig. 2), $AB = a$, $BC = b$, et on a

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 = y^2,$$

ensorte que

$$x = \sqrt{y^2 + c^2 + d^2}.$$

Par C on élève à AC la perpendiculaire $CD = c$, et joignant A et D, on a

$$\overline{AD}^2 = y^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = z^2;$$

conséquemment,

$$x = \sqrt{z^2 + d^2}$$

Par D on élève à AD la perpendiculaire $DE = c$, et joignant A et E, on a

$$\overline{AE}^2 = z^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

d'où

$$AE = x.$$

Pour construire

$$x = \sqrt{ac - fg + mq + rd},$$

on pourra faire $ac - fg + mq + rd = ay$, d'où

$$y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a},$$

et conséquemment,

$$x = \sqrt{ay};$$

ou bien on posera $ac = y^2$, $fg = z^2$, $mq = t^2$, $rd = u^2$, et

après avoir construit y, z, t, u par des moyennes proportionnelles, on aura réduit la proposée à la forme

$$x = \sqrt{y^2 - z^2 + t^2 + u^2}:$$

ainsi on construira d'abord

$$y^2 + t^2 + u^2 = r^2,$$

et il restera à construire

$$x = \sqrt{r^2 - z^2}.$$

5. On observera que les formules que nous venons de considérer, sont homogènes, c'est-à-dire que tous les termes ont le même nombre de facteurs ; ce qui n'arrive plus, lorsque l'une des lignes connues est prise pour unité ; car alors le degré de quelques-uns des termes est nécessairement abaissé : dans ce cas, on commence par rétablir l'homogénéité, en représentant par une lettre la ligne prise pour unité. Ainsi ces expressions

$$\frac{a^3 + b}{a^2 + c}, \quad \frac{2a^4c + ab^3 - d}{b^4 + a^3 - c},$$

reviennent à celles-ci,

$$\frac{a^3 + br^2}{a^2 + cr}, \quad \frac{2a^4c + ab^3r - dr^4}{b^4 + a^3r - cr^3},$$

r étant l'unité. On voit que, sans la restitution de r^2 et de r dans les termes de la première fraction, le numérateur représenterait la somme d'un volume et d'une ligne, et le dénominateur la somme d'un carré et d'une ligne, sommes impossibles. Ainsi pour construire $\sqrt{n}$, on prendra une moyenne proportionnelle entre la ligne n et l'unité. On sait que si l'on décrit le cercle qui a l'unité pour rayon, et qu'on y inscrive un carré et un triangle équilatéral, leurs côtés seront $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Quant à ces expressions $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc., on emploiera la construction (4) : en effet (fig. 2), pour BA $= 2$, BC $= 1$, on a AC $= \sqrt{5}$; sous les mêmes hypothèses, et en faisant de plus CD $= 1$, on aura AD $= \sqrt{6}$, et ainsi de suite.

6. L'équation du second degré

$$x^2 \pm px = \pm q$$

qui n'est pas homogène, le devient en rétablissant l'unité sous-entendue, et la représentant par r : faisant $qr = m^2$, cette équation devient

$$x^2 \pm px = \pm m^2.$$

Pour les signes inférieurs, on a

$$x^2 - px = - m^2 \ldots\ldots (1),$$

qui donne

$$m^2 = x(p - x).$$

Ainsi la ligne m est moyenne proportionnelle entre x et $p - x$; si donc (fig. 3), sur $AB = p$, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, et qu'en A on mène une tangente $AD = m$, puis par m une parallèle DE′ à AB, cette parallèle rencontrera la demi-circonférence en deux points E et E′ tels, qu'abaissant les perpendiculaires EF, E′F′, on aura

$$x = AF, \quad x' = AF'.$$

En effet,

$$AF = AC - CF; \quad AF' = AC + CF';$$

donc

$$AF = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2}, \quad AF' = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2}.$$

Considérons l'équation

$$x^2 - px = m^2, \quad \text{d'où} \quad m^2 = x(x - p) \ldots (2):$$

la ligne m étant moyenne proportionnelle entre x et $x - p$, on décrira (fig. 4) avec $AD = \frac{1}{2}p$ un arc de-cercle E′AE, puis prenant sur la tangente en A une longueur $AC = m$, la sécante CE′ menée par C et le centre D, donne

$$x = CE', \quad x' = - CE.$$

En effet, les deux racines de la proposée, sont

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + m^2},$$

$$x' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + m};$$

or $\quad \text{CE}' = \text{DE}' + \text{CD} = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + m^2},$

et $\quad \text{CE} = \text{CD} - \text{DE} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + m^2}.$

La première racine est donc $x = \text{CE}'$, et la seconde est $x' = -\text{CE}$: ces racines, prises en signes contraires, deviennent celles de l'équation

$$x^2 + px = m^2 \ldots\ldots (3),$$

qui n'est que la précédente, en y changeant x en $-x$.

On peut cependant construire autrement les racines de l'équation (3). Sur AB $= p$ (fig. 5), on décrira la demi-circonférence AMB; on mènera à cette demi-circonférence une tangente MT $= m$, et faisant AT $= x$, on aura

$$\text{TA} : \text{TM} :: \text{TM} : \text{TB}, \quad \text{d'où} \quad m^2 = x(x + p);$$

l'une des racines est

$$\text{TA} = \text{CT} - \text{CA} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + m^2};$$

et l'autre est

$$-\text{TA} - p = -(\text{TA} + p) = -(\text{TA} + \text{AB}) = -\text{TB}.$$

Il nous resterait à construire les racines de l'équation

$$x^2 + px = -m^2;$$

mais on voit qu'elles ne sont que celles de l'équation (1), prises négativement, c'est-à-dire qu'elles sont représentées par $-$AF et $-$AF' (fig. 3).

7. Nous passerons à la solution de quelques questions de géométrie, déterminées ; mais nous n'en traiterons qu'un très-petit nombre, parce que notre objet est surtout l'application de l'algèbre aux problèmes indéterminés.

Problème I. *Partager une ligne* AC *en deux parties* CB *et* BA *qui soient entr'elles dans le rapport donné* m : n (fig. 6).

Soient AC $=a$, CB $=x$, et conséquemment BA $=a-x$: on aura pour traduction de l'énoncé,

$$\frac{x}{a-x}=\frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{am}{m+n}.$$

Pour construire cette expression, il faudra sur une ligne EC faisant un angle quelconque avec CA, prendre CD $=m$, DE $=n$, si m et n sont des lignes : si ce sont des nombres, on portera une ouverture de compas, arbitraire, m fois de C en D, et n fois de D en E, on mènera AE et sa parallèle DB, et B sera le point cherché.

Problème II. *Etant donnés deux parallèles* BC, DE *et un point* A, *mener par ce point une oblique* AI, *telle que la partie interceptée* KI, *soit d'une longueur donnée* $=$ c (fig. 7).

Menant AG perpendiculaire sur DE, on connaîtra AG et FG ; soient AG $=a$, FG $=b$, GI $=x$; on a

$$\text{AI} : \text{AG} :: \text{KI} : \text{FG}, \quad \text{d'où} \quad \text{AI}=\frac{ac}{b};$$

mais d'ailleurs

$$\text{AI}=\sqrt{a^2+x^2};$$

donc

$$\frac{ac}{b}=\sqrt{a^2+x^2}, \quad \text{d'où} \quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{c^2-b^2}.$$

On voit d'abord que le problème n'est possible que pour $b<c$, c'est-à-dire, pour FG $<$ KI, et, en second lieu, qu'il admet deux solutions.

Construction. De F, comme centre, avec le rayon c, on

décrira l'arc HH′, et la ligne GH sera $\sqrt{c^2 - b^2}$: ainsi AI, parallèle à FH, sera la ligne cherchée, comme on le déduit des triangles semblables FGH, AGI. La seconde solution est donnée par GI′ = — GI.

Problème III. *Etant donnés deux points* A *et* B *et une droite* DD′, *décrire un cercle qui passe par ces deux points, et qui soit tangent à la droite* (fig. 8).

Il suffit de trouver le point D de contact : après avoir prolongé la droite BA en C, nous prendrons CD pour inconnue que nous désignerons par x, et on aura

$$x^2 = \mathrm{CB} \times \mathrm{CA}.$$

Or, I étant le milieu de AB, si l'on pose $\mathrm{CI} = a$, $\mathrm{IB} = \mathrm{IA} = b$, l'équation précédente deviendra

$$x^2 = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{a^2 - b^2},$$

formule qui annonce deux solutions qui ne seront possibles qu'autant qu'on aura $a > b$, ou CI > IB ou > IA ; et en effet, si le point C tombait, par exemple, en C′ entre A et I, la droite DD′ qui devrait contenir C′, ne pourrait plus être tangente. La première valeur $\sqrt{a^2 - b^2}$ étant CD, la seconde sera CD′ = CD, et en sens opposé.

Problème IV. *Par un point* A *donné, mener dans un cercle une corde* BAD, *coupée en* A *en deux segmens* BA *et* AD *qui soient dans un rapport donné* m : n (fig. 9).

Par le point A donné, menons le diamètre HAG : soient le rayon $\mathrm{CH} = r$, $\mathrm{CA} = b$, et l'inconnue $\mathrm{AD} = x$; on a

$$\mathrm{HA} \times \mathrm{AG} = \mathrm{BA} \times \mathrm{AD}, \quad \text{d'où} \quad (r - b)(r + b) = \mathrm{BA} \times x;$$

mais d'ailleurs

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AD} :: m : n, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{BA} = \frac{mx}{n};$$

conséquemment,

$$\frac{mx^2}{n} = r^2 - b^2, \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{\frac{n}{m}(r^2 - b^2)}.$$

Ce problème qui admet généralement deux solutions, devient

impossible pour $b > r$, c'est-à-dire, pour CA > CH. En le supposant possible, et posant $r^2 - b^2 = k^2$, on aura à construire

$$x = \pm \sqrt{\frac{n}{m} k^2}.$$

Construction. Nous remplacerons le rapport des deux lignes n et m par celui de deux carrés; et, à cet effet, sur une ligne indéfinie (fig. 10), nous prendrons des parties DF et FE telles qu'on ait

$$\frac{\text{DF}}{\text{FE}} = \frac{m}{n};$$

décrivant sur DE le demi-cercle DAE, puis menant FA perpendiculaire sur DE, et les cordes AD, AE, on aura

$$\frac{\overline{\text{AD}}^2}{\overline{\text{AE}}^2} = \frac{\text{DF}}{\text{FE}} = \frac{m}{n}; \quad \text{donc} \quad x = \frac{k.\text{AE}}{\text{AD}};$$

prenant donc $\text{AB} = k$, et menant BC parallèle à DE, on aura $\text{AC} = x$.

Remarque. L'arc décrit (fig. 9) de A, comme centre, avec la longueur x, comme rayon, coupe la circonférence en deux points D et D' qui donnent les deux cordes DB et D'B' qui satisfont à l'énoncé. C'est par les signes qui affectent ainsi la valeur de l'inconnue, que se complète la solution de la question : cependant il n'arrive pas toujours que toutes les racines, même réelles, soient admissibles, c'est-à-dire, qu'elles conviennent à l'énoncé, comme nous avons eu occasion de le faire remarquer dans l'algèbre où nous avons eu soin d'insister sur l'interprétation des signes; nous rappellerons, à cette occasion, que le calcul ne donne pas seulement la solution de la question proposée, mais en général, la solution des questions de la même espèce.

Pour $n = m$, on a $x = \sqrt{r^2 - b^2}$, et alors la corde BD est perpendiculaire au diamètre HG.

Problème V. *Par un point* A *pris dans un cercle, mener une corde* BAD *dont la longueur soit donnée et* = c (fig. 11).

En conservant les dénominations du problème précédent, on aura

$$x \times BA = r^2 - b^2 = k^2.$$

Mais $BA = c - x$; donc

$$k^2 = x(c - x), \quad \text{d'où} \quad x^2 - cx = -k^2,$$

équation dont nous avons précédemment construit les deux racines qui sont

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - k^2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + b^2 - r^2}:$$

le problème n'est donc possible que pour $r^2 = \frac{c^2}{4} + b^2$, ou pour $r^2 < \frac{c^2}{4} + b^2$. La première relation suppose que la corde $BD = c$ touche en A le cercle décrit du centre c avec le rayon r (fig. 12); car alors on aurait

$$\overline{CD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{CA}^2, \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{c^2}{4} + b^2;$$

la seconde suppose que le point A soit extérieur au cercle décrit de C, comme centre, avec un rayon égal à la plus courte distance CR de C à la corde BA (fig. 11); car on a

$$\overline{CD}^2 = \overline{DR}^2 + \overline{CR}^2 = \overline{DR}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{AR}^2,$$

et conséquemment,

$$r^2 = \frac{c^2}{4} + b^2 - \overline{AR}^2, \quad \text{c'est-à-dire}, \quad r^2 < \frac{c^2}{4} + b^2:$$

d'ailleurs (fig. 11), en tenant compte de la valeur de AR que nous venons de trouver, on a

$$x = DR + AR = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + b^2 - r^2}.$$

Lorsque le point R est au-dessous du point A (fig. 13), on a

$$x = \mathrm{DR} - \mathrm{AR} = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + b^2 - r^2}:$$

ces deux valeurs de x répondent donc aux deux tangentes qu'on peut mener par A au cercle du centre C et du rayon r, tangentes qui sont les cordes égales qu'on peut mener par le point donné dans le cercle proposé.

Problème VI. *Etant données trois droites qui se coupent deux à deux, construire un carré qui ait ses quatre angles sur ces trois droites* (fig. 14).

Les trois droites données sont $\mathrm{AB} = c$, AC et BC, et on connaît la hauteur $\mathrm{CD} = h$ du triangle ACB. Soit $abcd$ le carré cherché ; il suffira, pour le construire, de connaître sa hauteur $\mathrm{D}h = x$. Les triangles semblables CAB, Cab, donnent la proportion

$$\mathrm{C}h : \mathrm{CD} :: ab : \mathrm{AB};$$

c'est-à-dire,

$$h - x : h :: x : c,$$

en observant qu'on doit avoir, d'après l'énoncé,

$$ab = bc = h\mathrm{D}:$$

on tire de là

$$hx = ch - cx, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ch}{c+h},$$

formule qui ne donne qu'une solution, lors cependant que le problème en comporte deux ; car il existe visiblement un autre carré $a'b'c'd'$ qui satisfait aux conditions de l'énoncé, et pour lequel on détermine la hauteur $\mathrm{D}h' = x$ ou le côté, par la proportion

$$\mathrm{C}h' : \mathrm{CD} :: a'b' : \mathrm{AB},$$

ou $\quad x - h : h :: x : c, \quad$ d'où $\quad x = \dfrac{ch}{c-h}.$

Dans le cas de $c = h$, la dernière valeur de x est infinie ; ou, en d'autres termes, le problème est impossible ; c'est ce qu'il est aisé de reconnaître, en observant que, sous cette

relation, on aurait $Ch' = a'b'$, et que, comme Ch' est $< Dh'$ ou $< c'b'$, on aurait $a'b' < c'b'$, ensorte que la figure ne pourrait pas remplir les conditions d'un carré.

Problème VII. *La droite* DE *étant donnée de grandeur et de position hors d'un cercle donné aussi de grandeur et de position, trouver sur la circonférence un point* A *tel que menant aux extrémités de* DE *les droites* AD, AE, *qui rencontrent la circonférence aux points* B *et* C, *la corde* BC *soit parallèle à* DE (fig. 15).

Nous donnerons deux solutions de ce problème, pour mettre en évidence l'avantage qui résulte d'un heureux choix de l'inconnue, duquel résulte l'équation finale la plus simple, et conséquemment la plus facile à construire.

Puisqu'on connaît la grandeur et la position de la droite DE et du cercle, si du centre O on abaisse la droite OK perpendiculaire à DE, qu'on mène le rayon OB, qu'ensuite du point D on mène la tangente DF au cercle, on connaîtra les lignes $DE = a$, $OB = r$, $OK = c$, $DK = d$, $DF = f$; nous prendrons pour inconnues les lignes $DB = x$ et $BC = 2y$, dont chacune suffit cependant pour résoudre la question.

Les triangles semblables ADE, ABC donnent la proportion

$$AD : DE :: AB : BC;$$

or,

$$DA \times DB = \overline{DF}^2, \quad \text{d'où} \quad DA = \frac{\overline{DF}^2}{DB} = \frac{f^2}{x};$$

donc

$$AB = DA - DB = \frac{f^2}{x} - x = \frac{f^2 - x^2}{x};$$

ainsi la proportion devient

$$\frac{f^2}{x} : a :: \frac{f^2 - x^2}{x} : 2y;$$

d'où l'on tire l'équation

$$x^2 = f^2 - \frac{2f^2y}{a} \ldots\ldots (1).$$

A l'effet d'évaluer x et y, il faut avoir une autre équation entre ces inconnues. Si de B on abaisse la perpendiculaire BH sur DE, le triangle rectangle BDH donnera

$$\overline{BD}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{DH}^2:$$

or

$$BH = MK = OK - OM = OK - \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BM}^2} = c - \sqrt{r^2 - y^2},$$
$$DH = DK - HK = d - y:$$

substituant dans l'équation précédente, on obtient d'abord

$$x^2 = (y - d)^2 + (c - \sqrt{r^2 - y^2})^2;$$

isolant le radical dans un seul membre, élevant au carré, et posant, pour abréger, $r^2 + c^2 + d^2 = g^2$, on trouve enfin

$$x^4 + (4dy - 2g^2)x^2 + g^4 - 4b^2c^2 - 4g^2dy + 4(d^2 - c^2)y^2 = 0 \ldots (2).$$

Eliminant y entre les équations (1) et (2) [Algèbre, première sect., chap. XXV), on trouvera une équation de cette forme

$$x^4 + Ax^2 + B = 0;$$

et si on élimine x, on en trouvera une de celle-ci:

$$y^2 + Cy + D = 0,$$

les quantités A, B, C, D étant données en a, b, c, d, f. Ainsi DB est donnée par une équation du quatrième degré, et BC par une du second. Nous ne nous arrêterons pas à montrer comment on peut mener la corde BC, connaissant x ou y, et nous passerons de suite à une seconde solution de la question.

Du point D (fig. 16) menons la tangente DF, et par B la tangente BN, qui rencontre en N la droite DE. Les deux triangles DAE, DNB sont semblables, à cause de l'angle D commun, et de l'angle DNB = CBN = BAC : on a donc

$$DE : DA :: DB : DN = \frac{DA \times DB}{DE} = \frac{\overline{DF}^2}{DE}.$$

Ainsi, en faisant DE $=a$, DF $=f$, l'inconnue DN $=z$, on a

$$z=\frac{f^2}{a}.$$

DN est donc une troisième proportionnelle aux lignes connues DE et DF.

Construction. On joindra les points E et F, on portera DF de E en I, on mènera IK parallèle à DF, puis on prendra DN $=$ IK, et le point N sera le point cherché; car on a

$$\text{ED} : \text{DF} :: \text{EI ou DF} : \text{IK} = \frac{f^2}{a}$$

Comme on peut mener du point N deux tangentes NB, NB′, il y a sur la circonférence deux points A et A′ qui satisfont à la question; on les trouve en menant par D et par chacun des points B et B′, les droites DBA, DA′B′; ensorte que si, par ces points A et A′, on mène à l'autre point E de la droite DE, les droites ACE, EA′C′, et qu'on joigne B et C, B′ et C′, chacune des cordes BC, B′C′ sera parallèle à DE.

Remarque. On n'a besoin que du seul point N ou de la seule droite DN, pour mener les deux tangentes égales NB, NB′ qui déterminent les deux points A et A′, et conséquemment, les deux cordes BC, B′C′ : or l'inconnue $2y$ devant représenter indifféremment ces deux cordes, il doit arriver qu'à une même valeur de z répondent deux valeurs de y, ou qu'à l'équation du premier degré en z, réponde une équation du second degré en y. Mais nous avons trouvé

$$x^2=f^2-\frac{2f^2y}{a}, \quad \text{d'où} \quad x=\pm\sqrt{f^2-\frac{2f^2y}{a}}.$$

Ainsi, à chacune des deux valeurs de y, répondent deux valeurs de x égales, l'une positive et l'autre négative : il y a donc quatre valeurs de x pour deux valeurs de y et pour une de z. On trouve ces valeurs de x (fig. 17) en prolongeant BD et B′D, et prenant D$b=$ DB et D$b'=$ DB′; mais comme on a aussi D$a=$ DA, le cercle X′ passant par les trois

points b, a, b', est celui des deux autres solutions en x, et des mêmes solutions en y. Si l'on reprend la valeur

$$DN = \frac{DA \times DB}{DE} = \frac{DA' \times DB'}{DE}$$

trouvée plus haut, en observant que

$$DA \times DB = DA' \times DB';$$

on voit que DN change de signe par DE qui devient DE', en passant du cercle X au cercle X', ensorte que les tangentes menées de N au cercle X', le toucheront dans les points b et b' correspondans à B et B'. On observera ici que l'inconnue DN est liée, pour ainsi dire, d'une manière semblable aux inconnues x et y.

Problème VIII. *Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle, et la hauteur de ce triangle, déterminer le triangle* (fig. 18).

On observera qu'il suffit de connaître l'un des côtés du triangle. Soient x, y, z les trois côtés inconnus du triangle, h sa hauteur donnée, p la moitié de son périmètre, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit, enfin s l'aire du triangle proposé : on aura ces quatre équations qui énoncent des propriétés connues (Géom.),

$$(1)\ldots\; R = \frac{xyz}{4s}, \quad r = \frac{2s}{x+y+z}\ldots\ldots(2);$$

$$(3)\ldots\; s = \frac{hx}{2}, \quad s = \sqrt{[p(p-x)(p-y)(p-z)]}\ldots(4),$$

entre lesquelles il faut éliminer s avec deux des trois côtés x, y, z.

Si l'on introduit dans les équations (1), (2) et (4), au lieu de s, sa valeur donnée par (3), on aura

$$(5)\ldots\; 2hR = yz, \quad \frac{x+y+z}{2} = \frac{hx}{2r} = p\ldots(6);$$

$$\frac{hx}{2} = \sqrt{\left[\frac{hx}{2r}\left(\frac{hx}{2r}-x\right)\left(\frac{hx}{2r}-y\right)\left(\frac{hx}{2r}-z\right)\right]}\ldots(7);$$

élevant au carré, divisant par hx^2, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$4hr^4=(h-2r)(hx-2ry)(hx-2rz);$$

développant le second membre, remplaçant yz par sa valeur (5), et divisant par h, on aura

$$4r^4=h^2x^2-2hrx(x+y+z)+4r^2x(y+z)+8hr^2R-16hr^3R.$$

Substituant pour $x+y+z$ et $y+z$ leurs valeurs $\frac{hx}{r}$ et $\frac{(h-r)x}{r}$, réduisant et extrayant la racine, on parvient à une équation qui donne

$$x=h\pm\frac{2r\sqrt{2hR-4rR-r^2}}{h-2r}.$$

Construction. On prendra sur le diamètre AE du cercle circonscrit, la partie $\mathrm{AH}=h-2r$, et après avoir élevé à ce diamètre la perpendiculaire HK, prolongée jusqu'à la circonférence circonscrite, on décrira sur AK, comme diamètre, la demi-circonférence AHFK; ensuite on mènera du point K la corde $\mathrm{KF}=r$, puis la droite indéfinie AFG; et après avoir pris $\mathrm{AM}=2r$, on mènera MG parallèle à la corde HF, et l'on aura $\mathrm{AG}=x$, comme nous allons le prouver. Il suit de là qu'en inscrivant dans le cercle ACB, une corde $\mathrm{AB}=\mathrm{AG}$, la parallèle PG à AB, menée à une distance $\mathrm{PB}=h$, coupera la circonférence en deux points C et C', qui pourront chacun, à volonté, être pris pour le sommet du triangle.

Pour démontrer cette construction, on observera que les deux triangles semblables AMG, AHF donnent

$$\mathrm{AG} : \mathrm{AM} \text{ ou } 2r :: \mathrm{AF} : \mathrm{AH} \text{ ou } h-2r;$$

d'où $\mathrm{AG}=\frac{2r}{h-2r}\times\mathrm{AF}$;

mais $\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AK}}^2-\overline{\mathrm{KF}}^2=\overline{\mathrm{AK}}^2-r^2$,

et $\overline{\mathrm{AK}}^2=\overline{\mathrm{HK}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{HK}}^2+(h-2r)^2$,

d'ailleurs

$$\overline{HK}^2 = AH \times HE = (h - 2r)(2R - h + 2r)$$
$$= 2Rh - 4rR - h^2 - 4r^2 + 4rh..$$

donc $\overline{AK}^2 = 2hR - 4rR$,

et $\overline{AF}^2 = 2hR - 4rR - r^2$;

et enfin,

$$AG = \frac{2r\sqrt{2hR - 4rR - r^2}}{h - 2r}.$$

Si l'on prenait pour inconnue le segment AD formé par la hauteur CD du triangle ACB, on aurait, pour le déterminer, à résoudre une équation du quatrième degré, ce qui vient à l'appui de la règle énoncée par *Newton*, dans son *Arithmétique universelle.*

Problème IX. *Trouver la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle donné* (fig. 19).

Soient C le centre du cercle circonscrit, et C′ celui du cercle inscrit : soient R le rayon du premier cercle, et r celui du second : enfin, soit x la distance des centres C et C′. De C abaissons une perpendiculaire CG sur AC′ ; on aura dans le triangle ACC′,

$$x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 - 2AC' \times AG \ldots\ldots(1).$$

Si du centre C′ on abaisse la perpendiculaire C′c' sur le côté AB, le point c' sera celui du contact, et en observant que l'angle C′Ac' $= \frac{1}{2}$BAD $= \frac{1}{2}$A, on aura la proportion

$$AC' : C'c' :: 1 : \sin\tfrac{1}{2}A, \quad \text{d'où} \quad AC' = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}A};$$

du centre C abaissons la perpendiculaire Cc sur AB ; on aura l'angle

$$ACG = ACc + cCG = B + \tfrac{1}{2}A,$$

et le triangle ACG donnera la proportion

$$AG : AC \text{ ou } R :: \sin(B + \tfrac{1}{2}A) : 1,$$

d'où

$$AG = R\sin\left(B + \tfrac{1}{2}A\right);$$

par ces valeurs de AC′ et de AG, la relation (1) devient

$$x^2 = R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\frac{1}{2}A} - 2rR \times \frac{\sin\left(B+\frac{1}{2}A\right)}{\sin\frac{1}{2}A}$$
$$= R^2 - 2rR\left(\frac{\sin\left(B+\frac{1}{2}A\right)}{\sin\frac{1}{2}A} - \frac{r}{2R\sin^2\frac{1}{2}A}\right)\ldots(2).$$

Si l'on prolonge la ligne AC′ jusqu'à la rencontre du côté BD en K, et si l'on pose

$$AB = c,\quad BD = c',\quad AD = c'',$$

on aura, dans le triangle ABK,

$$AB : BK :: \sin AKB \text{ ou } \sin\left(B+\tfrac{1}{2}A\right) : \sin\tfrac{1}{2}A,$$

d'où l'on tire

$$\frac{AB}{BK} = \frac{\sin\left(B+\frac{1}{2}A\right)}{\sin\frac{1}{2}A};$$

mais parce que la ligne AK divise également l'angle en A, on a la proportion

$$BK : KD :: AB \text{ ou } c : AD \text{ ou } c'',$$

d'où

$$BK : BK + KD :: c : c + c'',$$

et de là

$$BK = \frac{cc'}{c+c''};$$

conséquemment,

$$\frac{\sin\left(B+\frac{1}{2}A\right)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{c+c''}{c'}\ldots(3).$$

D'ailleurs on connaît ces expressions en côtés du triangle des rayons des cercles inscrit et circonscrit, savoir,

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{(c+c'-c'')(c+c''-c')(c'+c''-c)}{c+c'+c''}\right]},$$

$$R = \frac{cc'c''}{\sqrt{[(c+c'+c'')(c+c'-c'')(c+c''-c')(c'+c''-c)]}};$$

d'où

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{1}{2}(c+c'-c'')(c+c''-c')(c'+c''-c)}{cc'c''},$$

et celle-ci,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(c'+c''-c)(c+c'-c'')}{4cc''};$$

donc

$$\frac{r}{2R \sin^2 \frac{1}{2} A} = \frac{c+c''-c'}{c'} \ldots\ldots (4).$$

La substitution des valeurs (3) et (4) dans (2), donne

$$x^2 = R^2 - 2rR\left(\frac{c+c''}{c'} - \frac{c+c''-c'}{c'}\right) = R^2 - 2rR = R(R-2r).$$

Remarque. Dans le cas du triangle équilatéral, on trouve

$$r = \frac{c}{2\sqrt{3}}, \quad R = \frac{c}{\sqrt{3}}; \qquad \text{donc} \qquad R = 2r \quad \text{et} \quad x = 0;$$

ainsi les deux centres se confondent. Lorsque $c = c'$, auquel cas le triangle est isoscèle, on trouve

$$x = \frac{c\,(c - c'')}{\sqrt{(2c - c'')(2c + c'')}}.$$

J'ai donné une solution beaucoup plus simple de cette question dans le XI^e numéro des *Annales de mathématiques* que nous aurons fréquemment occasion de citer dans le cours de cet Ouvrage.

Voyez l'*Arithmétique universelle* de *Newton*, ouvrage qui vient d'être mis à la portée de tout lecteur, par l'excellente traduction de M. *Noël Baudeux*, accompagnée d'éclaircissemens précieux.

CHAPITRE II.

Elémens de position d'un point dans un plan ; notation algébrique de ces élémens. Equation d'une droite dans un plan, rapportée à des coordonnées obliques et rectangulaires. Problèmes. Autre équation de la ligne droite, au moyen de la perpendiculaire menée de l'origine sur sa direction, et de l'angle de cette perpendiculaire avec l'axe des abscisses. Equation polaire de la ligne droite.

8. SOIENT (fig. 20) deux lignes ou *axes* AX, AY que nous supposerons à angles droits, et considérons un point quelconque M dans l'angle YAX : si de ce point on abaisse une perpendiculaire MP sur AX, on pourra passer du point A au point M, en parcourant sur l'axe AX la longueur AP, et s'élevant au-dessus de l'extrémité P à la hauteur PM.

Un point est donc complètement défini de position dans l'angle YAX, par ses deux plus courtes distances AP et PM, ou MQ et MP, à deux axes rectangulaires AY, AX.

Le point A qui est l'intersection des axes, est dit *origine*, parce que c'est de ce point que se comptent les distances MQ, MP qu'on retrouve sur chacun des axes en AP et AQ.

Que a et b représentent ces distances ; il faut dire que l'une doit être portée sur l'axe AX et l'autre sur l'axe AY ; à partir du point A. Nous noterons abréviativement par x la distance du point à l'axe AY, comptée sur AX, c'est-à-dire AP ; et par y la distance PM à l'axe AX, laquelle se retrouve en AQ sur AY.

Ainsi ces formules

$$x = a, \quad y = b,$$

énonceront que a et b sont des longueurs données, à porter de l'origine A, la première sur AX, et la seconde sur AY; ensorte que menant par les extrémités P et Q les perpendiculaires PM et QM, on a, par leur intersection, le point M; ou plutôt, par l'extrémité P de a, on prend sur une parallèle à AY une longueur b dont l'extrémité est encore le point en question.

9. Mais le point peut être dans l'un des quatre angles droits formés autour de A par les axes prolongés : il faut donc encore rappeler le sens dans lequel chacune des longueurs a et b doit être portée.

Si l'on est convenu de noter par

$$x = a, \quad y = b,$$

un point M situé dans l'angle YAX, tout point M dans l'angle YAX' le sera par

$$x = -a, \quad y = b;$$

tout point M'' dans l'angle Y'AX', sera désigné par

$$x = -a, \quad y = -b;$$

enfin tout point M''' dans l'angle Y'AX, le sera par

$$x = a, \quad y = -b.$$

Les signes de x seront les mêmes que ceux des cosinus, et les signes de y les mêmes que ceux des sinus des angles ayant le sommet en A, et en convenant que de A vers X le cosinus sera positif, et qu'au-dessus de AX le sinus sera pareillement positif (Alg., chap. XVI).

10. On énoncera que le point est sur l'axe AX, et on en définira la position sur cet axe, en écrivant

$$y = 0, \quad x = a;$$

Pour un point particulier de l'axe AY, on aura

$$x = 0\,, \quad y = b.$$

Enfin l'origine A est caractérisée par $x = 0$, $y = 0$. Il faut bien se rappeler que ces lettres x et y signifient : *distance aux axes* AY, AX.

11. Examinons, en particulier, la signification de chacune des formules

$$x = a\,, \quad y = b :$$

la première caractérise tout point dont la distance à l'axe AY est a ; c'est donc la notation d'une parallèle à cet axe, menée à une distance $= a$; la seconde $y = b$ définit une parallèle à l'axe AX, menée à la distance $y = b$. Si ces deux formules existent ensemble, elles ne sont plus relatives qu'au seul point commun aux deux droites précédentes ; et en effet, nous savons déjà que ce point est indiqué par $x = a$, $y = b$. Les axes AX, AY, en totalité, sont désignés par

$$y = 0\,, \quad x = 0.$$

12. Supposons maintenant que les deux axes AX, AY (fig. 21) fassent entr'eux un angle quelconque, autre qu'un droit ; alors les distances du point M aux axes obliques AX, AY, mesurées sur des perpendiculaires menées du point sur ces axes, ne seraient plus respectivement parallèles à ces axes, ensorte qu'on n'aurait plus $Ap = Mq$, $Aq = Mp$. Mais qu'on mène par M une parallèle MP à AY, et par le même point une parallèle MQ à AX, et on formera le parallélogramme APMQ, dans lequel AP, MQ ou AP, PM remplaceront les distances perpendiculaires employées dans le cas des axes rectangulaires. Le point M sera toujours représenté par

$$x = a\,, \quad y = b\,,$$

où $a = AP$, $b = PM$. Mais ici, outre les longueurs a et b, et les signes qui en indiquent le sens, comme on l'a

vu précédemment, il faudra de plus connaître l'inclinaison des axes, afin de savoir suivant quelle direction on doit porter l'ordonnée PM $= b$, toujours parallèle à l'axe des AY.

13. Les lignes x et y sont encore nommées, la première *abscisse*, la seconde, *ordonnée* du point M; prises ensemble, elles sont dites, *coordonnées;* ces dénominations conviennent également aux coordonnées rectangulaires et obliques. L'axe AX sur lequel on compte les abscisses x, se nomme *axe des* x, et l'axe AY sur lequel ou parallèlement auquel on porte les ordonnées y, se nomme *axe des* y.

On dit abréviativement *le point* x, y, au lieu de : *le point dont les coordonnées sont* x *et* y.

14. On pourra aussi définir le point M (fig. 22) par la longueur AM et par l'angle que fait AM avec l'axe AX; en désignant cette longueur AM par z, et l'angle MAX par φ, on aura

$$z = c, \qquad \varphi = A^{\circ},$$

A° étant le nombre de degrés et parties de degrés de l'angle φ, et c la valeur linéaire de z. On nomme z *rayon vecteur*.

15. Une droite est donnée de position dans un plan par les coordonnées de deux de ses points : elle l'est encore par celles d'un point et par l'angle qu'elle fait avec l'un des axes. C'est ce dernier système de données qu'on emploie.

16. Si la droite (fig. 23) passe par l'origine, sa position est évidemment fixée par la seule donnée de l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses; c'est le cas que nous considérerons d'abord comme étant le plus simple, et nous nous proposerons d'assigner le rapport entre les coordonnées d'un point quelconque de cette droite.

Soit α l'angle de la droite avec l'axe AX, et considérons en particulier un point M' ayant pour coordonnées AP' $= x'$, P'M' $= y'$: ces coordonnées, ainsi que celles des autres points de la droite faisant entr'elles un angle $\mathfrak{C}$ qui est celui des

axes, on aura cette relation

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Pour des points M″, M‴, etc. dont les coordonnées seraient x'', et y''; x''' et y''', etc., on aurait pareillement

$$\frac{y''}{x''} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad \frac{y'''}{x'''} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \text{ etc.}$$

Le terme général de ces rapports constans dans toute l'étendue de la droite, sera

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \dots (1),$$

x et y désignant ici les coordonnées d'un point quelconque de la droite, ensorte que x devenant successivement x', x'', x''', etc., y se change dans les coordonnées correspondantes y', y'', y''', etc. La formule (1) est ce qu'on appelle *l'équation de la droite;* c'est l'énonciation algébrique d'une propriété commune à tous ses points : nous l'écrirons ainsi

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} x \dots (2):$$

on se donne l'abscisse x qui est arbitraire, et de la relation (2) on conclut l'ordonnée correspondante y.

L'angle α venant à varier, la ligne change de position en tournant autour du point A; ainsi à la même abscisse x correspond une autre ordonnée y, ce qui arrive encore si β vient à varier; mais ce qu'il est essentiel d'observer, c'est que pour toutes les valeurs tant de α que de β, la relation (2) reste de même forme, et que la droite prend toutes les positions possibles dans le plan des axes.

17. Qu'on veuille maintenant trouver l'équation d'une droite R′L′ (fig. 21), située d'une manière quelconque : si on lui a mené par l'origine A une parallèle AL, on observera que,

pour une abscisse $x = AP$, l'ordonnée correspondante de la droite AL, c'est-à-dire, Pm, sera augmentée de $mM = AR$, que nous désignerons par b; ainsi en ajoutant b à chacun des membres de l'équation (2), et désignant encore $y+b = PM$ par y, on aura pour équation de la droite R'L'

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin(6 - \alpha)}\, x + b \ldots\ldots (3).$$

Ici α et b fixent la position de la droite R'L', de telle manière que ces quantités étant données, on peut la tracer; mais si la droite est assujétie à quelques conditions particulières, comme d'être menée par deux points, de passer par un point, d'être parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée de position, etc., etc., les quantités α et b sont des inconnues à déterminer, ainsi que nous le verrons bientôt.

18. Supposons les quantités α, 6, b données, et qu'il s'agisse de construire la droite de l'équation (3) : tout se réduit à connaître deux de ses points ; nous chercherons ceux dans lesquels elle coupe les deux axes AX, AY (fig. 24); or l'intersection R étant le seul point de la droite pour lequel on ait $x = 0$, et R' le seul point de la même droite pour lequel on ait $y = 0$, on supposera successivement dans (3) $x = 0$, $y = 0$, et on trouvera

$$y = b = AR, \qquad x = -\frac{\sin(6 - \alpha)}{\sin \alpha}\, b = AR' :$$

portant donc à gauche de l'origine A la longueur AR', si elle est négative, et sur AY la longueur AR supposée positive, la ligne menée par ces deux points sera celle de l'équation (3).

On peut construire autrement. Ayant, par exemple, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $b = 3$, et connaissant toujours l'angle 6 entre les axes, on prendra d'abord $AR = 3$; puis ayant mené la parallèle RX' à AX, on prendra $Rp = 1 =$ rayon des tables ; puis de R, comme centre, avec le rayon Rp, on décrira un arc de cercle; par p on lui mènera une perpendiculaire indéfinie sur laquelle, à partir de p, on prendra $pm = \frac{1}{2}$; par m on

mènera une parallèle à AX, jusqu'à cet arc, en M, et on tracera RM qui sera la droite cherchée.

Si pour une droite représentée par

$$y = x + 1,$$

qu'on suppose rapportée à des axes obliques faisant entr'eux un angle de 50° (*), on veut trouver l'inclinaison α sur l'axe des x, il faudra poser

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(50^\circ - \alpha)} = 1, \text{ d'où } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha,$$

et conséquemment,

$$\tang\alpha = \frac{1}{1+\sqrt{2}};$$

d'où l'on déduira, au moyen des tables, la valeur angulaire de α, laquelle, avec $b = 1$, servira à tracer la droite.

19. Pour la même longueur $b = \mathrm{AR}$ (fig. 26) et tous les angles possibles $\alpha = \mathrm{LRX}'$, la droite R'L prend toutes les positions possibles autour du point R; pour chaque valeur angulaire de α de 0° à 400°, prise avec toutes les valeurs possibles de b, tant positives que négatives, la droite R'L passe par tous les points de l'axe YY'; il n'existe donc aucune droite dans le plan des axes, dont l'équation ne soit comprise dans (3), pour un système de valeurs convenables de α et b.

On observera que les variations de l'angle ζ n'influent pas sur la position de la droite, mais seulement sur l'inclinaison commune des ordonnées par rapport à l'axe des abscisses, de manière que, pour une même abscisse, l'ordonnée correspond à un autre point de la droite.

20. Si l'on désigne la droite par l, ces notations (l, x), (l, y) seront propres à indiquer les angles de la droite l avec les axes des x et des y : ainsi on pourra remplacer $\sin\alpha$ par

(*) Nous supposerons la division centésimale du quadrant.

$\sin(l, x)$, et $\sin(\zeta - \alpha)$ par $\sin(l, y)$; ainsi l'équation (3) deviendra

$$y = \frac{\sin(l, x)}{\sin(l, y)} x + b \ldots\ldots (4).$$

21. Supposons que les axes deviennent rectangulaires, auquel cas $\sin(\zeta - \alpha) = \cos \alpha$: l'équation (3) se change alors dans celle-ci

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x + b = ax + b \ldots\ldots\ldots (5),$$

a représentant $\operatorname{tang} \alpha$: d'après la notation précédente, on peut l'écrire ainsi

$$y = x \operatorname{tang}(l, x) + b \ldots\ldots (6).$$

22. On construit l'équation (5), ainsi que nous l'avons dit précédemment, en cherchant les intersections de la droite qu'elle représente, avec les axes rectangulaires ; mais si la droite passe par l'origine (fig. 27), auquel cas $b = 0$, pour construire l'équation

$$y = ax \ldots\ldots (7),$$

on prendra $AP = 1$ = rayon des tables, puis ayant porté sur une perpendiculaire élevée par P, une longueur $PM = a$, prise sur une échelle de parties égales entr'elles et à l'unité linéaire, l'extrémité M sera un autre point de la droite.

Les deux droites

$$y = x + 1, \quad y = x - 1$$

sont parallèles, puisque le coefficient de x, qui est la tangente de l'angle fait par la droite avec l'axe des x, est le même dans les deux équations ; la première droite coupe l'axe des x à une distance $= -1$, à gauche de l'origine, et la seconde droite le coupe à une distance $= 1$, à droite de la même origine.

On trouvera que les deux droites

$$y = x + 1, \quad y = -x - 1$$

coupent l'axe des x au même point, qu'elles sont situées symé-

triquement par rapport à l'axe des x, c'est-à-dire, sous le même angle, l'une au-dessus, l'autre au-dessous, et de plus, qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre.

La droite

$$y = x\sqrt{-1} - 1$$

se réduit à un point situé sur l'axe des y, au-dessous de l'axe des x, à une distance de l'origine égale à l'unité, puisqu'il n'y a qu'une valeur réelle de y, laquelle correspond à $x = 0$.

Ainsi la ligne b et la tangente trigonométrique a étant données, il est possible et facile de construire la droite de l'équation

$$y = ax + b;$$

car ces données déterminent le point dans lequel la droite coupe l'axe des y, point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = b$, et celui dans lequel elle coupe l'axe des x, et qui répond à $y = 0$ et $x = -\frac{b}{a}$. Réciproquement, connaissant l'ordonnée y du point dans lequel une droite rencontre l'axe des y, et l'abscisse x de son intersection avec l'axe des x, on peut composer l'équation de la droite.

Par exemple, l'ordonnée de l'intersection d'une droite avec l'axe des y, est $-\frac{3}{7}$; et l'abscisse de l'intersection de la même droite, avec l'axe des abscisses, est $-\frac{5}{8}$; on a d'abord $b = -\frac{3}{7}$; pour trouver a, on décrira (fig. 28) de R′, comme centre, avec le rayon $= 1 =$ R′n, un arc auquel on mènera la tangente nt, et on aura la proportion

$$nt : \mathrm{R}'n :: \mathrm{AR} : \mathrm{R}'\mathrm{A};$$

d'où

$$a = \frac{3}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{24}{35},$$

et, en observant que la tangente a est négative, on obtiendra cette équation de la droite

$$y = -\frac{24}{35}x - \frac{3}{7}.$$

23. Dans les questions suivantes, nous supposerons les axes

rectangulaires, ensorte qu'il s'agira toujours d'évaluer les inconnues a et b de manière que la droite

$$y = ax + b$$

ait la position requise.

Problème I. *Assujétir une droite à passer par deux points donnés.*

Les données de position de ces points, seront x', y' pour l'un, x'', y'' pour l'autre; il faut écrire que chacun de ces points se trouve sur la droite: c'est ce qu'on exprimera en disant, 1°. que lorsque l'abscisse générale x de la droite, devient x', l'ordonnée correspondante y devient y'; 2°. que pour $x = x''$, l'ordonnée $y = y''$. On a donc à joindre à cette équation générale d'une droite,

$$y = ax + b \ldots\ldots (1).$$

ces deux équations de condition,

$$(2) \ldots\ y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b \ldots (3),$$

dont la différence donne

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''},$$

et par la substitution de cette valeur de a dans l'une des équations (2) et (3), on trouve

$$b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'},$$

reportant ces valeurs de a et b dans (1), on obtient

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots (4),$$

x et y étant les coordonnées générales de la droite. On parviendra plus simplement à l'équation (4) en retranchant (2) de (1), ce qui donne

$$y - y' = a(x - x') \ldots (5),$$

et substituant dans cette équation la valeur de a, tirée de la différence entre (2) et (3). Il faut observer ici que retrancher (2) de (1), revient à prendre dans (2) la valeur b, et à la porter en place de b dans (1).

Il ne sera pas inutile de résoudre la même question par la géométrie. Soient (fig. 29)

$$AP'=x',\ P'M'=y',\ AP''=x'',\ P''M''=y'',\ AP=x,\ PM=y;$$

les triangles semblables $M'mM$, $M'm''M''$ donnent

$$Mm=\frac{M''m''}{M'm''}.M'm,$$

d'où

$$PM-P'M'=\frac{P''M''-P''m''}{AP''-AP'}(AP-AP');$$

en remplaçant ces lignes par les notations algébriques, on retombe sur l'équation (4).

Dans le triangle $M''M'm''$, la tangente trigonométrique de l'angle $M''M'm''$ est

$$a=\frac{M''m''}{M'm''}=\frac{M''P''-M'P'}{AP''-AP'}=\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

On a encore

$$AR=b=P'M'-M'm'=P'M'-a\times Rm'=y'-\frac{y''-y'}{x''-x'}.x',$$

ce qui est la valeur de b trouvée plus haut.

Il convient encore de discuter l'équation (4), c'est-à-dire, de s'assurer si elle rend les conséquences des hypothèses faites sur les données x', y', x'', y'', ce qui servira d'ailleurs de vérification. Dans cette équation, en faisant $x=x'$, on trouve $y=y'$, ce qui doit arriver. L'équation (4) revient encore à celle-ci

$$y-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'')\ldots.(6),$$

qui pour $x=x''$, donne $y=y''$, ce qui doit être. Si l'on sup-

pose $y'=y''$, et alors les deux points donnés M′, M″ sont à la même distance de l'axe AX, on trouve, d'après (4) et (6),

$$y=y',\quad y=y'',$$

ce qui indique que l'ordonnée générale est constante, ou que la droite est parallèle à AX, conclusion qu'on tire encore de l'expression de a qui devient nulle. Pour $x'=x''$, les deux points M′, M″ sont sur une perpendiculaire à AX par l'extrémité de x'; en même temps $a=\infty$, conséquence de l'hypothèse. Enfin, aux deux hypothèses $x'=x''$, $y'=y''$, correspond $a=\frac{0}{0}$, ce qui apprend que la position de la droite est indéterminée; et en effet, elle n'est assujétie qu'à la condition de passer par un seul point. Sous l'hypothèse $y=0$, l'abscisse correspondante

$$x=\frac{x''y'-y''x'}{y'-y''}$$

est celle AR′ (fig. 29) du point de rencontre de la droite avec l'axe des abscisses : pour $x=0$, on trouverait l'ordonnée AR$=b$.

Problème II. *Exprimer la distance de deux points au moyen des coordonnées de ces points* (fig. 30).

La distance M′M″ est l'hypothénuse du triangle rectangle M′M″m'', et si on la désigne par D, on aura

$$D=\sqrt{\overline{M''m''}^2+\overline{M'm''}^2}=\sqrt{(y''-y')^2+(x''-x')^2}.$$

Si le point M′ est à l'origine A, les coordonnées x', y' devenant nulles, l'expression précédente se réduit à

$$D=\sqrt{y''^2+x''^2}=x''\sqrt{1+a^2},$$

parce qu'alors l'équation de la droite

$$y=ax$$

devant avoir lieu pour $x=x''$, $y=y''$, donne

$$y''=ax''.$$

Problème III. *Assujétir une droite à passer par un point*

donné, et à être parallèle à une ligne donnée de position.

Soit

$$y = ax + b \ldots\ldots (1),$$

l'équation de la droite donnée pour laquelle les quantités a et b sont conséquemment connues : soit l'équation de la droite cherchée

$$y = a'x + b' \ldots. (2)$$

où les quantités a' et b' sont inconnues. Désignons par x', y' les coordonnées du point donné : puisqu'il doit être sur la seconde droite, on aura la condition

$$y' = a'x' + b' \ldots\ldots (3):$$

retranchant (3) de (2), ce qui revient, comme nous l'avons dit (probl. I), à évaluer b', on aura

$$y - y' = a'(x - x') \ldots\ldots (4);$$

d'ailleurs, les deux droites devant être parallèles, les tangentes trigonométriques a et a' doivent être les mêmes ; introduisant cette seconde condition dans (4), l'équation de la droite cherchée sera

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots (5).$$

Si l'on veut dire que le point donné est sur la droite donnée, il faut écrire que l'équation (1) a encore lieu en changeant x en x', et y en y', auquel cas elle devient

$$y' = ax' + b;$$

substituant cette valeur de y' dans (5), on trouve après les réductions,

$$y = ax + b;$$

donc la seconde droite se confond avec la première, ce qu'on savait d'avance.

Problème IV. *Trouver l'angle de deux droites données de position dans un plan* (fig. 31).

Les données de la question sont les angles $\mathrm{CAX} = \alpha$,

CBX $= \alpha'$ que doit faire chacune des droites avec l'axe AX, et il s'agit de trouver l'angle ACB $=$ V. On a (Géom.)

$$\alpha' = \alpha + \mathrm{V},$$

d'où $$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{a'-a}{1+aa'},$$

en posant tang $\alpha = a$, tang $\alpha' = a'$. Si les droites sont parallèles, tang $\mathrm{V} = 0$, et on trouve $a' = a$, résultat connu. Si les droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, tang $\mathrm{V} = \infty$, donc

$$1 + aa' = 0 \ldots\ldots(1).$$

Telle est donc la relation fréquemment employée qui existe entre les coefficiens de x dans les équations de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.

Réciproquement, dans le cas de cette relation, les droites font un angle droit; car on déduit de (1),

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' = 0,$$

conséquemment,

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 0;$$

donc l'angle

$$\alpha' - \alpha = \mathrm{V} = 100^{d}.$$

Problème. V. 1°. *Assujétir une droite à passer par un point donné et à rencontrer une droite donnée, sous un angle déterminé; 2°. trouver l'expression de la distance entre le point donné et le point de rencontre* (fig. 32).

1°. L'équation de la droite donnée est

$$y = ax + b \ldots\ldots(1);$$

celle de la droite cherchée est

$$y = a'x + b' \ldots\ldots(2).$$

On connaît a, b, et il faut évaluer a' et b' d'après les conditions de l'énoncé. Or en tant que la droite cherchée doit passer par le point x', y', son équation devant avoir lieu pour

$x=x'$, $y=y'$, sera

$$y'=a'x'+b'\ldots\ldots(3),$$

et conséquemment en retranchant (3) de (2), on aura

$$y-y'=a'(x-x')\ldots.(4).$$

Nous avons donc déterminé b' d'après l'une des conditions; et il reste à évaluer a' d'après l'autre. Or m désignant la tangente trigonométrique de l'angle entre les deux droites, on a (problème IV),

$$m=\frac{a'-a}{1+aa'},\quad \text{d'où}\quad a'=\frac{a+m}{1-ma};$$

reportant cette valeur pour a' dans (4), on introduira la seconde condition, et la droite cherchée aura pour équation

$$y-y'=\frac{a+m}{1-ma}(x-x')\ldots.(5).$$

2°. Pour obtenir la portion de cette droite comprise entre le point x', y' et la droite donnée, il faut connaître les coordonnées de l'intersection de ces deux droites, coordonnées qui ne peuvent être que les valeurs de x et y qui satisfont en même temps aux deux équations (1) et (5), et que nous désignerons par x'', y'' : mais comme la formule de la distance entre deux points x', y'; x'', y'', est donnée au moyen des différences $x''-x'$, $y''-y'$ (prob. II), nous préparerons ainsi les équations (1) et (5),

$$y''-y'=a(x''-x')-y'+ax'+b,$$
$$y''-y'=\frac{a+m}{1-ma}(x''-x'):$$

on déduit de là

$$y''-y'=-\frac{a+m}{m(a^2+1)}(y'-ax'-b),$$

$$x''-x'=-\frac{1-ma}{m(a^2+1)}(y'-ax'-b).$$

Substituant ces valeurs dans la formule de la distance (probl. II), qui est

$$D = \sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]},$$

on trouve

$$D = \frac{y'-ax'-b}{m}\sqrt{\frac{1+m^2}{1+a^2}} \ldots\ldots (6).$$

Lorsque le point x', y' est sur la droite donnée, l'équation (1) étant satisfaite par x', y', donne

$$y' = ax' + b, \quad \text{d'où} \quad y' - ax' - b = 0;$$

et, d'après cela, $D = 0$: ce qui doit être, puisqu'alors la droite menée du point x', y' au point x'', y'', est nulle.

Lorsque la droite cherchée doit être perpendiculaire à la droite donnée, on a $m = \infty$, $1 + m^2$ devient m^2, et l'expression (6), qui donne alors la plus courte distance d'un point à une droite, devient

$$D = \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}} = M'P' \ldots\ldots (7).$$

Que la droite doive faire avec celle qui est donnée un angle de 50°; il faut faire $m = 1$, et

$$D' = \frac{(y'-ax'-b)\sqrt{2}}{\sqrt{1+a^2}} = M'P \ldots\ldots (8).$$

Le rapport de D' à D, c'est-à-dire, de $M'P$ à $M'P'$, est celui de la diagonale au côté du carré, qui a pour expression

$$\frac{M'P}{M'P'} = \sqrt{2}.$$

Écrivons la plus courte distance (7) sous la forme

$$D = \frac{\frac{y'}{a} - x' - \frac{b}{a}}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}},$$

et observons que, pour la droite R'L (fig. 33), on a $-\frac{b}{a}=$ AR', ensorte que

$$D=\frac{\frac{y'}{a}-x'+AR'}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}:$$

si la droite R'L tourne autour du point R', jusqu'à devenir perpendiculaire en R' à l'axe AX, on aura $a=\infty$ et

$$D = AR' - x' = M'N'.$$

Lorsque $a=0$ et $b=0$, on trouve d'après (7)

$$D = y' = M'P';$$

ce qui doit arriver, puisque la droite donnée se confond alors avec l'axe AX.

Problème VI. *Assigner la condition sous laquelle trois droites menées des trois sommets d'un triangle, se couperaient en un seul point* (fig. 34).

Soient x', y'; x'', y''; x''', y''' les coordonnées des sommets D, B et C : les trois droites menées par ces sommets auront pour équations

$$y-y'=a'(x-x'),\quad y-y''=a''(x-x''),\quad y-y'''=a'''(x-x'''),$$

a', a'', a''' étant les tangentes trigonométriques des angles entre chacune de ces droites et l'axe des abscisses, angles qui particulariseront le système de droites à l'égard desquelles on résout la question. Il faut donc dire que ces trois équations sont satisfaites par un même système de coordonnées x et y, lesquelles appartiendront au point commun ou de concours R des trois droites. On trouve ainsi l'équation de condition

$$\begin{aligned}a'(y''-y''')+a''(y'''-y')+a'''(y'-y'')+a'a''(x'-x'')&\\+a''a'''(x''-x''')&\\+a'''a'(x'''-x')&=0\ldots(1).\end{aligned}$$

Si l'on place le côté BC (fig. 35) sur l'axe des abscisses, et le

point B à l'origine A, ce qui donne

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad y''' = 0,$$

l'équation de condition se simplifie et devient

$$-a''y' + a'''y' + a'a''x'' - a''a'''x''' + a'''a'(x''' - x') = 0 \ldots .(2).$$

Dans chacune des questions suivantes, il sera plus simple de former directement l'équation de condition, que de recourir aux formules (1) ou (2).

Problème VII. *Rechercher s'il existe un point unique de rencontre des droites menées des trois sommets d'un triangle perpendiculairement aux côtés opposés* (fig. 36).

L'équation du côté AC, est

$$y = 0,$$

et celle de la droite DP'' passant par D et perpendiculaire à AC, est

$$x = x'',$$

x'' étant l'abscisse du point D. La droite DC assujétie à passer par les points D et C, qui ont pour coordonnées x'' et y'', x''' et $y''' = 0$, a pour équation

$$y = \frac{-y''}{x''' - x''}(x - x'''),$$

et celle de la droite AP qui lui est perpendiculaire, étant de la forme

$$y = ax,$$

on a pour condition de perpendicularité entre DC et AP (probl. IV),

$$\frac{-ay''}{x''' - x''} + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{x''' - x''}{y''}.$$

On trouve de même que la droite DA ayant pour équation

$$y = \frac{y''}{x''}x,$$

et la droite CP′ représentée par

$$y = a'(x - x'''),$$

seront perpendiculaires sous la condition

$$\frac{a'y''}{x''} + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad a' = -\frac{x''}{y''}.$$

Il s'agit donc de reconnaître si les trois droites

$$x = x'', \quad y = \frac{x''' - x''}{y''}x, \quad y = -\frac{x''}{y''}(x - x'''),$$

menées par D, A et C, se coupent en un point unique. Or d'après la première équation, la seconde et la troisième deviennent identiques. Ainsi les deux perpendiculaires AP, CP′ se coupent sur la perpendiculaire DP″ en R, et on n'a pas eu besoin de recourir à la condition analogue à (2), [probl. VI]. Pour introduire la condition DA = DC, il faudra supposer $x''' = 2x''$. Le triangle devenant équilatéral, on aura

$$y''^2 + x''^2 = \overline{AD}^2 = x'''^2 = 4x''^2, \quad \text{d'où} \quad y'' = x''\sqrt{3}.$$

Problème VIII. *Rechercher s'il existe un point unique de rencontre des trois droites menées des trois sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés* (fig. 37).

Menons du point A au milieu M du côté DC, la droite AM; et désignons toujours par x'', y'' les coordonnées de D, et par x''', $y''' = 0$ celle de C; les coordonnées de M seront $\frac{y''}{2}$, $\frac{x''' + x''}{2}$: ainsi la tangente trigonométrique de l'angle MAX sera $\frac{y''}{x''' + x''}$, et l'équation de AM,

$$y = \frac{y''}{x''' + x''}.x \ldots (1).$$

Les coordonnées de M′, milieu de AD, étant $\frac{y''}{2}$, $\frac{x''}{2}$, la tan-

gente de M'CA sera $\frac{y''}{2x''' - x''}$, et conséquemment

$$\tang M'CX = \frac{y''}{x'' - 2x'''};$$

ensorte que

$$y = \frac{y''}{x'' - 2x'''}(x - x''')\ldots\ldots(2)$$

sera l'équation de CM'. Enfin M'', milieu de AC, ayant pour abscisse $\frac{x'''}{2}$, l'équation de DM'' sera

$$y = \frac{2y''}{2x'' - x'''}\left(x - \frac{x'''}{2}\right)\ldots\ldots(3).$$

Or, comme en substituant dans (2) et (3) pour y, sa valeur donnée par (1), on déduit des résultats la même valeur de x, savoir,

$$\cancel{x = \frac{x'' + x''}{3}}; \quad x = \frac{x'' + x'''}{3}$$

on conclut de là que les deux droites CM', DM'' se coupent en un point R' de AM. A cette valeur x répond

$$y = \frac{y''}{3}:$$

ainsi le point R' est au tiers de la ligne M''D, à partir de M''. Ce point R' est, en effet, le centre de gravité du triangle (*Statique*).

Problème IX. *Rechercher s'il existe un point unique de concours des trois perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle* (fig 38).

L'équation de AD est

$$y = \frac{y''}{x''}x,$$

celle de DC est

$$y - y'' = \frac{y''}{x'' - x'''}(x - x''),$$

celle de AC est

$$y = 0\,;$$

1°. l'équation de la perpendiculaire sur le milieu M′ de AD, est

$$y - \tfrac{1}{2}y'' = -\frac{x''}{y''}(x - \tfrac{1}{2}x'') \ldots (1)\,;$$

2°. celle de la perpendiculaire sur le milieu M de DC, est

$$y - \tfrac{1}{2}y'' = -\frac{x'' - x'''}{y''}\left(x - \frac{x'' + x'''}{2}\right) \ldots (2)\,;$$

3°. celle de la perpendiculaire sur le milieu M″ de AC, est

$$x = \frac{x'''}{2} \ldots\ldots (3).$$

Les équations (1) et (2) donnent, après avoir égalé les valeurs de y,

$$x = \frac{x'''}{2},$$

ce qui prouve que les deux premières perpendiculaires se coupent sur la troisième, en R″. D'ailleurs la substitution de la valeur de x donnée par (3) dans les équations (1) et (2), rendant les seconds membres identiques, on en conclut que les deux premiers le sont aussi, et qu'ainsi les deux premières perpendiculaires se coupent sur la troisième.

Problème X. *Trouver l'équation d'une droite qui divise également l'angle de deux droites données* (fig. 39).

Soient AD, AC les deux droites données, et AM celle qui divise également l'angle DAC : on aura pour équation de AD,

$$y = ax\,;$$

pour équation de AC,

$$y = a'x,$$

et pour équation de AM,

$$y = Ax,$$

A étant une quantité à déterminer au moyen de a et b. Or

AM fait avec AD un angle dont la tangente est

$$\frac{a-A}{1+aA},$$

et l'angle de AM avec AC a pour tangente

$$\frac{A-a'}{1+a'A}.$$

On a donc la condition

$$\frac{A-a'}{1+a'A}=\frac{a-A}{1+aA},$$

d'où l'on déduit pour A cette équation du second degré

$$A^2-\frac{2(aa'-1)}{a+a'}A-1=0,$$

qui donne les deux racines

$$A'=\frac{aa'-1+\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'},$$

$$A''=\frac{aa'-1-\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'}.$$

Comme la relation

$$A'A''+1=0$$

est satisfaite, puisque le dernier terme de l'équation du second degré est -1, il faut en conclure (probl. IV) que les deux lignes AM qui résolvent la question, sont à angles droits ; l'une AM divise l'angle donné, et l'autre AM′ divise le supplément DAC′ : et, en effet, la division en deux parties égales de l'un de ces deux angles, emporte celle de l'autre.

On peut supposer, sans altérer la généralité de la solution, que la droite AC se confonde avec AX, auquel cas $a'=0$, et les racines précédentes deviennent

$$A'=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a},\quad A''=\frac{-1-\sqrt{1+a^2}}{a};$$

la première de ces deux tangentes étant positive, est celle de l'angle MAC; la seconde est celle du supplément.

Problème XI. *Rechercher s'il existe un point unique de concours des trois droites qui divisent également les trois angles d'un triangle* (fig. 40).

Nous venons de trouver

$$A' = \frac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{a},$$

a
~~A~~ étant la tangente de l'angle DAC. Pour résoudre la même question à l'égard de l'angle D, nous imaginerons par A une parallèle AC′ à DC; ensorte que la ligne AM′, qui divisera également l'angle C′AD, sera parallèle à la ligne DD′ qui diviserait l'angle ADC suivant la même condition, et conséquemment l'angle M′AC′ sera égal à l'angle D′DC. Or l'équation de AD est

$$y = ax,$$

celle de AC′,

$$y = \alpha x,$$

celle de AM′,

$$y = Bx;$$

ces équations étant les mêmes que celles qui ont été employées dans le problème précédent, sauf le changement de a' en α, et de A en B, on aura ces deux valeurs de B,

$$B' = \frac{a\alpha - 1 + \sqrt{(1 + a^2)(1 + \alpha^2)}}{a + \alpha},$$

$$B'' = \frac{a\alpha - 1 - \sqrt{(1 + a^2)(1 + \alpha^2)}}{a + \alpha}.$$

La division de l'angle DCA en deux parties égales par CR″, est ramenée à celle de l'angle C′AX′ par AM″ parallèle à CR″: or l'équation de AX′ est

$$y = 0,$$

celle de AC′ est

$$y = \alpha x,$$

et celle de AM″ est

$$y = Cx\,;$$

donc on aura ces deux valeurs de C, analogues à A″ et à A′ (probl. X),

$$C' = \frac{-1-\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}, \qquad C'' = \frac{-1+\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}.$$

On dira que le triangle ADC est isoscèle, en écrivant $\alpha = -a$, parce que $\alpha = \text{tang}\, C'AX = \text{tang}\, DCX$, qui est, au signe près, la tangente de $DCA = DAC$: dans ce cas,

$$B' = \text{tang}\ DD'C = \infty,$$

d'où l'on conclut que la ligne DD′ qui divise également l'angle ADC, est perpendiculaire sur AC.

Il est facile d'énoncer la tangente B de l'angle DD′C, au moyen des tangentes A, C et α, et de juger ainsi du signe de B : désignant par m la tangente de l'angle $D'DC = \frac{1}{2}ADC$, on a (Trigon.)

$$\text{tang}\, DD'C = B = \frac{\alpha - m}{1 + \alpha m}\,;$$

de l'égalité

$$DCX = ADC + DAC,$$

résulte celle-ci

$$\frac{ADC}{2} = \frac{DCX}{2} - \frac{DAC}{2},$$

d'où (Trigon.)

$$m = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}DCX - \text{tang}\,\frac{1}{2}DAC}{1 + \text{tang}\,\frac{1}{2}DCX \times \text{tang}\,\frac{1}{2}DAC} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}DCX - A}{1 + A\,\text{tang}\,\frac{1}{2}DCX}\,;$$

or

$$DCX + DCA = \pi, \qquad \text{d'où} \quad \frac{DCX}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{DCA}{2}\,;$$

donc

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}DCX = \frac{1}{\text{tang}\,\frac{1}{2}DCA} = \frac{1}{\text{tang}\,R''CA} = -\frac{1}{C},$$

d'où l'on conclut

$$m=\frac{-\frac{1}{C}-A}{1-\frac{A}{C}}=\frac{1+CA}{A-C}.$$

et
$$B=\frac{\alpha(A-C)-(1+CA)}{(A-C)+\alpha(1+CA)}.$$

Pour $1+CA=0$, ce qui a lieu si les droites AR‴ et CR‴ sont perpendiculaires l'une à l'autre, on trouve $B=\alpha$, ensorte que D′D et CD sont parallèles, et alors le triangle n'existe pas.

Si l'on suppose les angles DAC, DD′C aigus, et l'angle DCX obtus, et que l'on désigne toujours par x'', y'' les coordonnées du point D, et par x''', $y'''=0$ celles de C, on aura pour l'équation AR‴,

$$y=A'x,$$

pour celle de DR‴,

$$y-y''=B'(x-x''),$$

enfin pour celle de CR‴,

$$y=C'(x-x'''):$$

les coordonnées du point de rencontre de AR‴ et CR‴ sont

$$x=\frac{C'x'''}{C'-A'},\quad y=\frac{A'C'x'''}{C'-A'},$$

la droite menée par D et par R‴ aura donc pour équation

$$y-y''=\frac{y''(C'-A')-A'C'x'''}{x''(C'-A')-C'x'''}(x-x'').$$

Ainsi $\frac{y''(C'-A')-A'C'x'''}{x''(C'-A')-C'x'''}$ est la tangente que la droite menée par D et par le point de concours de CR‴ et AR‴ fait avec l'axe AX, et si les trois droites concourent en R‴, cette tangente doit être $=B'$. Pour connaître si cette identité a

lieu, éliminons y'' et x''' d'après les relations

$$a=\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{AP}}=\frac{y''}{x''},\qquad \alpha=-\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{CP}}=-\frac{y''}{x'''-x''},$$

d'où l'on déduit

$$y''=ax'',\qquad x'''=\frac{(\alpha-a)\,x''}{\alpha}:$$

ces substitutions donnent

$$\frac{y''(\mathrm{C}'-\mathrm{A}')-\mathrm{A}'\mathrm{C}'x'''}{x''(\mathrm{C}'-\mathrm{A}')-\mathrm{C}'x'''}=\frac{a\alpha(\mathrm{C}'-\mathrm{A}')-\mathrm{A}'\mathrm{C}'(\alpha-a)}{a\mathrm{C}'-\alpha\mathrm{A}'}\ldots.(a).$$

Or si l'on multiplie le numérateur de la racine B', d'abord par $\sqrt{1+a^2}$, puis par $\sqrt{1+\alpha^2}$, et qu'on ajoute ces produits, on aura une somme divisible par $a+\alpha$; ainsi en multipliant les deux termes B' par la somme $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+\alpha^2}$, on trouvera

$$\mathrm{B}'=\frac{\alpha\sqrt{1+a^2}+a\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+\alpha^2}}\ldots.(b);$$

or comme $\mathrm{A}'\mathrm{A}''=-1$, $\mathrm{C}'\mathrm{C}''=-1$, on a

$$\mathrm{A}'=-\frac{1}{\mathrm{A}''}=\frac{a}{1+\sqrt{1+a^2}},$$

$$\mathrm{C}'=-\frac{1}{\mathrm{C}''}=\frac{\alpha}{1-\sqrt{1+\alpha^2}};$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{1+a^2}=\frac{a-\mathrm{A}'}{\mathrm{A}'},\qquad \sqrt{1+\alpha^2}=\frac{\mathrm{C}'-\alpha}{\mathrm{C}'}.$$

Ces valeurs portées en place des radicaux dans l'expression (b) la changent dans l'expression (a); d'où l'on conclut que les trois droites concourent en un point.

Théorème. *Les points de concours, 1°. des perpendiculaires menées des sommets sur les côtés opposés d'un triangle; 2° des perpendiculaires élevées sur les milieux de ces côtés; 3°. des*

lignes qui joignent les sommets avec les milieux de ces côtés, sont en ligne droite.

Les perpendiculaires menées par A et D aux côtés DC et AC, ont pour équations [probl. VII], (fig. 36),

$$y = \frac{x''' - x''}{y''} x, \quad x = x'';$$

les coordonnées du point de concours R, sont

$$x = x'', \quad y = \frac{x''' - x''}{y''} x''.$$

Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés AD, AC, sont [probl. IX], (fig. 38) représentées par

$$y - \tfrac{1}{2} y'' = -\frac{x''}{y''} (x - \tfrac{1}{2} x''), \quad x = \frac{x'''}{2};$$

les coordonnées du point de concours R″, sont

$$x = \frac{x'''}{2}, \quad y = \frac{y''}{2} - \frac{x''}{y''} \left(\frac{x''' - x''}{2}\right).$$

L'équation d'une droite assujétie à passer par ces deux points de concours R et R″, est donc

$$y''y - (x''' - x'') x'' = \frac{3(x''' - x'') x'' - y''^2}{2x'' - x'''} (x - x'') \ldots\ldots (1);$$

ainsi tout se réduit à reconnaître si les coordonnées du point de concours de deux des trois droites qui joignent les sommets avec les milieux des côtés opposés, satisfont à cette équation. Or l'équation de la ligne menée de A au milieu M de DC, est [probl. VIII), (fig. 37)

$$y = \frac{y''}{x''' + x''} x,$$

celle de la droite menée de C au milieu M′ de AD, est

$$y = \frac{y''}{x'' - 2x'''} (x - x'''),$$

et comme les coordonnées du point R′ d'intersection de ces deux droites, savoir,

$$x=\frac{x'''+x''}{3}, \quad y=\frac{y''}{3},$$

réduisent l'équation (1) à zéro, on en conclut que les trois points en question sont en ligne droite.

Problème XII. *Trouver le cosinus de l'angle entre deux droites données de position* (fig. 41).

On peut toujours à deux droites quelconques qui se coupent, en substituer deux autres AL et Al menées par l'origine A, et qui soient respectivement parallèles aux proposées. Prenant $AM = AM' = 1$, on aura (Trigon.) et (20),

$$\cos(L, l)=\frac{\overline{AM'}^2+\overline{AM''}^2-\overline{M'M''}^2}{2AM'\times AM''}=\frac{2-\overline{M'M''}^2}{2}.$$

Si l'on désigne par x', y' les coordonnées du point M′ et par x'', y'' celles du point M″, on aura (Probl. II.)

$$\begin{aligned}\overline{M'M''}^2 &= (y'-y'')^2+(x'-x'')^2\\ &= y'^2+x'^2+y''^2+x''^2-2(y'y''+x'x'')\\ &= 2-2(y'y''+x'x''),\end{aligned}$$

en observant que $y'^2+x'^2=\overline{AM'}^2=1$, et que $y''^2+x''^2 = \overline{AM''}^2=1$; donc

$$\cos(L, l)=y'y''+x'x'':$$

or les équations de AL et Al, sont

$$y=ax, \quad y=a'x,$$

et conséquemment,

$$y'=ax', \quad y''=a'x'';$$

d'où $y'y''=aa'x'x''$, et

$$\cos(L, l)=(aa'+1)\,x'x'';$$

mais d'ailleurs $a^2x'^2+x'^2=1$, $a'^2x''^2+x''^2=1$; donc

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\quad x''=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2}},$$

et enfin

$$\cos(L,l)=\frac{1+aa'}{\sqrt{1+a^2}\times\sqrt{1+a'^2}}.$$

Pour $\cos(L,l)=0$, ou $(L,l)=\frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence, on a $1+aa'=0$, relation démontrée (probl. IV) entre les coefficiens de x, pour deux droites rectangulaires.

On peut arriver à ce résultat d'une manière plus simple. En effet, si l'on désigne par α l'angle LAX, et par α' l'angle lAX, on aura

$$\cos(\alpha-\alpha')=\cos\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha'\sin\alpha;$$

or (Trigon.),

$$\sin\alpha=\frac{\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}},$$
$$\sin\alpha'=\frac{\text{tang}\,\alpha'}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha'}},\quad \cos\alpha'=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha'}};$$

donc en posant $\text{tang}\,\alpha=a$, $\text{tang}\,\alpha'=a'$, on trouvera par ces substitutions dans $\cos(\alpha'-\alpha)$,

$$\cos(\alpha-\alpha')=\cos(L,l)=\frac{aa'+1}{\sqrt{1+a^2}\times\sqrt{1+a'^2}}.$$

Problème XIII. *Problème des courriers en nombre quelconque* (fig. 42).

On entend par *mouvement uniforme*, le mouvement en vertu duquel un corps parcourt des espaces égaux dans des intervalles de temps égaux, ensorte que les espaces sont proportionnels aux temps employés à les parcourir; mais les ordonnées d'une ligne droite sont aussi proportionnelles aux abscisses correspondantes : ainsi les abscisses étant prises pour représenter les temps, les ordonnées représenteront les espaces correspondans, et la vîtesse

qui n'est que l'espace parcouru pendant l'unité de temps, sera l'ordonnée correspondante à l'abscisse égale à l'unité linéaire.

En conservant les désignations employées dans l'algèbre (première sect., chap. 16), et prenant $AP = 1$, l'ordonnée PM correspondante sera la vîtesse d du second courrier; mais pour que l'origine des temps, qui est celle des abscisses, soit la même pour les deux courriers, nous supposerons le premier courrier en R, lorsque le second est en A, ensorte que l'espace AR déjà parcouru par ce premier courrier, lorsqu'on compte 0 temps, sera $a + bc$, a étant l'intervalle entre les deux lieux de départ, c la vîtesse, et b le nombre d'heures dont le départ du premier courrier précède celui du second. Si par R on mène RX' parallèle à l'axe des abscisses, et qu'on prenne $RP' = AP = 1$, $P'M'$ sera la vîtesse c du premier courrier, et une ordonnée quelconque de la droite RN, telle que pn, se composera toujours de $pp' = AR$ et de $p'n$, espace parcouru par le premier courrier pendant le temps qu'emploie le second courrier à parcourir l'espace pn'; ainsi la question de trouver l'espace parcouru par le second courrier, lorsqu'il rencontre le premier, se réduit à assigner l'ordonnée QN du point d'intersection des deux droites AN, RN, et l'abscisse AQ du même point, donnera le temps écoulé jusqu'à cette époque, depuis le moment du départ du second courrier. Or l'équation de la droite AN est

$$y = dx,$$

et celle de RN est

$$y = cx + a + bc;$$

mais au point de rencontre, les deux droites devant avoir mêmes coordonnées, on aura

$$x = \frac{a + bc}{d - c} \ldots\ldots (1),$$

valeur de x à laquelle correspond

$$y = \frac{d(a + bc)}{d - c} \ldots\ldots (2).$$

La différence $n'n$ entre les espaces parcourus au bout du temps Ap, est

$$n'n = (c - d)\,x + a + bc,$$

laquelle devient nulle par la valeur de x donnée par la formule (1).

On voit que l'espace AR déjà parcouru par le premier courrier, lorsque le second part, venant à diminuer, et devenant, par exemple, AR′, si le point de rencontre doit toujours être en N, la vitesse c, qui est la tangente de l'angle NR′X″, doit augmenter; pour trouver ce qu'elle doit être, on cherchera l'équation d'une droite assujétie à passer par les points R′ et N, dont les coordonnées sont o, y' pour R′, x'' et y'' pour N, en observant que x'', y'' sont les valeurs de x et y données par les formules (1) et (2), et y' l'espace parcouru par le premier courrier, lorsqu'on compte o temps, lequel espace est donné; ensorte qu'en désignant par A la tangente de l'angle NR′X″, on aura (probl. I)

$$A = \frac{y'-y''}{x'-x''} = \frac{y''-y'}{x''} = \frac{d\,(a+bc) - y'\,(d-c)}{d-c}.$$

Ainsi les trois courriers dont les marches sont représentées par

$$y = dx,$$
$$y = cx + a + bc,$$
$$y = Ax + y',$$

se rencontreraient au bout du temps représenté par la formule (1), et après avoir parcouru l'espace représenté par la formule (2).

On remarquera que si dans la troisième équation, on fait varier y', et alors A variera, on aura de nouvelles droites qui passant par différens points de l'axe AY, iront se couper et couper les trois premières en N, d'où il résulte que les courriers dont les marches sont représentées par ces droites, iront se rencontrer.

On pourrait encore supposer des courriers en nombre quelconque qui se rencontreraient deux à deux, trois à trois, etc., et alors on aurait à chercher les coordonnées d'intersections d'autant de droites correspondantes et données.

Problème XIV. *Un point* M *étant donné de position par rapport à un angle* YAX *connu, et dans un même plan avec lui, trouver sur ce plan deux autres points* m *et* m′ *par lesquels menant dans une direction arbitraire, deux droites parallèles* mn, m′n′ *coupant les deux côtés de l'angle, le point donné se trouve constamment sur la direction de l'une des diagonales du trapèze intercepté entre les parallèles et les deux côtés de l'angle* (fig. 43).

Soit pris le sommet A de l'angle pour l'origine des coordonnées, son côté AX pour axe des abscisses, et son côté AY pour axe des y; désignons par x' et y' les coordonnées du point M donné; par α et β, α' et β' les coordonnées inconnues des points m et m' : il s'agit de déterminer les points m et m', de manière que, quelle que soit d'ailleurs la direction commune des parallèles mn, $m'n'$, le point M soit toujours en ligne droite avec l'une des diagonales De ou Ed.

Les équations des deux parallèles arbitraires mn, $m'n'$, seront de la forme

$$(1)\ldots\quad y-\beta=\mathrm{N}(x-\alpha),\qquad y-\beta'=\mathrm{N}(x-\alpha')\ldots(2),$$

où N est une indéterminée. Cherchons les coordonnées des points D et e; pour avoir celles du point D, on fera dans (1), $y=0$, d'où résulteront

$$y=0,\quad x=\frac{\mathrm{N}\alpha-\beta}{\mathrm{N}};$$

les coordonnées du point e seront données par $x=0$ dans (2), et on aura

$$x=0,\quad y=\beta'-\mathrm{N}\alpha'.$$

L'équation de condition pour que trois points x et y, x' et

y', x'' et y'' soient en ligne droite, est (probl. I[er]),

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')\ldots.(3);$$

d'où l'on tire

$$x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)=0.$$

Pour appliquer cette équation aux points M, e et D, on remplacera x et y par x' et y'; x' et y' par $\frac{N\alpha-\beta}{N}$ et o; x'' et y'' par o et $\beta'-N\alpha'$, et on aura

$$x'(N\alpha'-\beta')+\frac{N\alpha-\beta}{N}(\beta'-N\alpha'-y')=0,$$

qui revient à

$$\alpha'(x'-\alpha)N^2-[\beta'(x'-\alpha)+\alpha y'-\beta\alpha']N-\beta(\beta'-y')=0,$$

équation qui, à raison de l'indétermination de N, se partage dans les trois suivantes,

$$\alpha'(x'-\alpha)=0,\quad \beta'(x'-\alpha)+\alpha y'-\beta\alpha'=0,\quad \beta(\beta'-y')=0.$$

Le problème est donc indéterminé, puisqu'il ne fournit que trois équations entre les quatre coordonnées α, β, α' et β' des deux points cherchés m et m'.

La première et la troisième équation ne peuvent être satisfaites que par les quatre systèmes de valeurs

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha'=0 & \alpha'=0 & \alpha=x' & \alpha=x' \\ \beta=0 & \beta'=y' & \beta=0 & \beta'=y'. \end{array}$$

Le premier système qui exprime que le point m est sur l'axe des x, et le point m' sur l'axe des y, change la seconde équation dans celle-ci,

$$\beta'(x'-\alpha)+\alpha y'=0,$$

qui énonce que les points m ou D, m' ou e sont en ligne droite avec M, ce dont on peut s'assurer en remplaçant dans

(3) y et x par x' et y', x' et y' par α et β, x'' et y'' par o et $\mathcal{C}'$. Ainsi les points cherchés seront les intersections des deux côtés de l'angle avec une droite menée d'une manière quelconque par le point donné.

Quant au dernier système qui exprime que les points cherchés sont sur des parallèles menés par le point M aux deux côtés de l'angle, il réduit la seconde équation à

$$\alpha y' - \mathcal{C}\alpha' = o \qquad \text{ou} \qquad \alpha\mathcal{C}' - \mathcal{C}\alpha' = o,$$

à cause de $y' = \mathcal{C}'$, équation qui exprime que les points cherchés sont en ligne droite avec l'origine ; ensorte que, pour ce second cas, ces points seront les intersections d'une droite menée d'une manière quelconque par le sommet de l'angle donné, avec des parallèles à ses deux côtés, menées par le point donné.

Le second système $\alpha' = o$, $\mathcal{C}' = y'$ change la seconde équation dans celle-ci,

$$x' = \alpha + \alpha = o, \qquad \text{ou} \qquad x' = o,$$

et le troisième système $\alpha = x'$, $\mathcal{C} = o$ la réduit à

$$x'y' = o,$$

conclusions qui doivent être rejetées, puisque le point x', y' est donné.

24. *Enoncer l'équation d'une droite au moyen de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite* (fig. 44).

Soient RR′ la droite, d la perpendiculaire AD, α l'angle de AD avec l'axe AX des abcisses : si l'on considère sur la droite un point M dont les coordonnées soient $AP = x$, $PM = y$, et que de P on mène la perpendiculaire Pp sur AD, et de M le parallèle Mm à AD, on aura

$$d = AD = Ap + pD :$$

or,

$$Ap = x \cos \alpha, \qquad pD = mM = y \sin \alpha,$$

donc

$$d = x \cos \alpha + y \sin \alpha \ \ldots\ldots(1)$$

est l'équation de la droite RR′ fixée de position par celle de la perpendiculaire et par la longueur de cette perpendiculaire.

Si la droite RR′ doit passer par les deux points x', y' ; x'', y'' : on aura

$$d = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \ldots\ldots(2),$$

$$d = x'' \cos \alpha + y'' \sin \alpha \ldots\ldots(3);$$

donc

$$(x''-x')\cos\alpha + (y''-y')\sin\alpha = 0,$$

et conséquemment

$$\tan\alpha = \frac{x'-x''}{y''-y'},$$

mais d'après ces formules démontrées (Trig.), savoir,

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

ou

$$\sin\alpha = \frac{x'-x''}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{y''-y'}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}};$$

et, d'après l'une ou l'autre des formules (2) et (3), on trouve

$$d = \frac{x'y''-x''y'}{\sqrt{x''-x')^2+(y''-y')^2}}:$$

distance de l'origine à une droite passant par deux points x' et y', x'' et y'. Reportant ces valeurs de d, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, dans l'équation (1), on obtient celle-ci

$$(y''-y')x-(x''-x')y = x'y''-x''y' \ldots\ldots(4),$$

forme à laquelle se réduit, en effet, l'équation d'une droite passant par les points x', y' ; x'', y'' (probl. I).

25. *De l'équation polaire de la ligne droite* (fig. 45).

F étant un point donné de position et qu'on nomme *pôle*, tout point M d'une droite *ll* connue de position, est donné par $FM = z$, qu'on nomme *rayon vecteur*, et par l'angle φ entre ce rayon et une parallèle FX menée par F à l'axe des abscisses. Or

$$y = PM = Pf + fM,$$
$$x = AP = Ap + pP.$$

Si l'on désigne par p et q les coordonnées connues du pôle F, rapportées à l'origine A, on aura donc

$$(1)\ldots\ldots y = q + z\sin\varphi, \qquad x = p + z\cos\varphi,\ldots\ldots(2)$$

par ces valeurs de x et y, l'équation de la droite, qui est

$$y = ax + b,$$

devient

$$z(\sin\varphi - a\cos\varphi) + q - ap - b = 0,$$

d'où l'on tire

$$z = -\frac{q - ap - b}{\sin\varphi - a\cos\varphi}.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin\varphi = 1, \quad \cos\varphi = 0 \quad \text{et} \quad z = -(q - ap - b).$$

Si l'on désigne cette valeur FM' de z par R, on obtiendra cette équation polaire de la droite

$$z = \frac{R}{\sin\varphi - a\cos\varphi}:$$

on déduit encore des équations (1) et (2)

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{y - q}{x - p}.$$

CHAPITRE III.

De la transformation des coordonnées dans un plan.

26. Il serait difficile de faire pressentir ici l'utilité des formules que nous allons démontrer : nous nous bornerons donc à observer qu'ayant une suite de points rapportés à un système d'axes soit rectangulaires, soit obliques et à une certaine origine, elles servent à rapporter ces points à un autre système d'axes rectangulaires ou obliques et à une autre origine; et comme l'expression des anciennes coordonnées en nouvelles, renferme des quantités relatives à la position de la nouvelle origine, par rapport à l'ancienne, et à l'inclinaison de chacun des nouveaux axes sur les axes primitifs, il s'ensuit que si la nouvelle origine et les nouveaux axes ne sont pas donnés de position, on pourra disposer des quantités qui les fixent, de manière à simplifier la relation donnée, sans cependant lui faire perdre de sa généralité : par là, la description de la ligne et la recherche de ses propriétés deviennent plus faciles, comme on le verra dans les deux chapitres suivans.

Problème I. *Passer d'un système d'axes à un autre système d'axes respectivement parallèles au premier* (fig. 46).

Supposons qu'un point M soit rapporté par ses coordonnées $AP = x$, $PM = y$ aux axes rectangulaires AX, AY, et à l'origine A, et qu'on veuille le rapporter à une origine A′ donnée de position par rapport à A, et à des axes A′X′, A′Y′ parallèles aux premiers : on connaît donc les coordonnées $AB = a$, $BA' = b$ de la nouvelle origine A′ rapportée à l'origine primitive A : si l'on désigne par x', y' les coordonnées A′P′, P′M du point M par rapport aux axes variés, on aura entre x, y, x', y', ces relations

$$x = a + x', \qquad y = b + y' \ldots (1),$$

qui ont encore lieu dans le cas où les axes AX, AY sont obliques, pourvu que les axes variés A′X′, A′Y′ leur soient parallèles.

Problème II. *Passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques, en conservant l'origine* (fig. 47).

AX, AY sont les axes primitifs auxquels est rapporté le point M par les coordonnées $AP = x$, $PM = y$; AX′, AY′ sont les axes variés par rapport auxquels les coordonnées du point M sont $AP' = x'$, $P'M = y'$; l'angle entre les axes primitifs est $YAX = \beta$, et les axes variés AX′, AY′ font avec AX des angles $X'AX = \alpha$, $Y'AX = \alpha'$. On a

$$x = Ap + pP = Ap + P'p',$$
$$y = Mp' + p'P = Mp' + P'p;$$

mais

$$Ap = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta}\,x', \qquad P'p' = \frac{\sin(\beta - \alpha')}{\sin\beta}\,y',$$

$$Mp' = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta}\,y', \qquad P'p = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,x'.$$

Ainsi on a

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(\beta-\alpha) + y'\sin(\beta-\alpha')}{\sin\beta} \\ y &= \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\beta} \end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

Pour déplacer l'origine, il faut, d'après les équations (1), ajouter a au second membre de la première de ces formules; et b au second membre de la seconde, et par là, ces formules deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x'\sin(\beta-\alpha) + y'\sin(\beta-\alpha')}{\sin\beta} \\ y &= b + \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\beta} \end{aligned}\right\}\ldots(3).$$

Problème III. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques* (fig. 47).

Lorsque les axes primitifs AX, AY deviennent rectangulaires, l'angle 6 entre ces axes est $= 100°$, $\sin 6 = 1$, et les formules (3) deviennent

$$x = a + x'\cos\alpha + y'\cos\alpha', \quad y = b + x'\sin\alpha + y'\sin\alpha' \ldots (4).$$

Problème IV. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes aussi rectangulaires.*

On a donc $\alpha' - \alpha = 100°$, et conséquemment

$$\sin\alpha' = \cos\alpha, \qquad \cos\alpha' = -\sin\alpha,$$

et les formules (4) deviennent

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = b + x'\sin\alpha + y'\cos a \ldots (5).$$

Problème V. *Enfin, passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires* (fig. 48).

On peut au moyen des formules (4), évaluer x', y' qui sont les coordonnées obliques, au moyen de x et y qui sont les coordonnées rectangulaires ; ou bien on résout la question directement, comme on va le voir. Soient $AP' = x'$, $P'M = y'$ les coordonnées obliques du point M ; $AP = x$, $PM = y$, les coordonnées rectangulaires de ce point, et désignons par α', α les angles des axes AY', AX' avec AX. On a

$$y' = MP' : \cos\alpha :: Mp : \sin(\alpha' - \alpha),$$

$$Mp = MP - Pp = y - x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

donc

$$y' = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

En second lieu,

$$x' = AP' : \sin\alpha' :: Ap' : \sin(\alpha' - \alpha),$$

$$Ap' = AP - p'P = x - y\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'};$$

donc

$$x' = \frac{x \sin \alpha' - y \cos \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Ainsi en changeant en même temps d'origine, on a ces formules

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + \frac{x \sin \alpha' - y \cos \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \\ y' &= b + \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} \end{aligned}\right\} \ldots (6).$$

27. Nous écrirons les formules (3), (4), (5) et (6) en faisant entrer sous les signes sin et cos, les axes primitifs et variés entre lesquels on prend les angles (20) : ainsi on aura pour le passage d'un système de coordonnées obliques x, y à un autre système de coordonnées obliques x', y' (probl. II),

$$x = a + \frac{x' \sin(y, x') + y' \sin(y, y')}{\sin(y, x)},$$

$$y = b + \frac{x' \sin(x, x') + y' \sin(x, y')}{\sin(y, x)};$$

pour le passage d'un système d'axes rectangulaires x, y à un système d'axes obliques x', y' (probl. III),

$$x = a + x' \cos(x, x') + y' \cos(x, y'),$$

$$y = b + x' \sin(x, x') + y' \sin(x, y');$$

pour le passage d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes rectangulaires (probl. IV),

$$x = a + x' \cos(x, x') - y' \sin(x, x'),$$

$$y = b + x' \sin(x, x') + y' \cos(x, x');$$

enfin, pour le passage d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires (probl. V),

$$x' = a + \frac{x \sin(y', x) - y \cos(y', x)}{\sin(y', x')},$$

$$y' = b + \frac{y \cos(x', x) - x \sin(x', x)}{\sin(y', x')}.$$

28. Nous donnerons plus loin, lorsqu'il s'agira de l'espace, la transformation des coordonnées en trois dimensions.

CHAPITRE IV.

Construction et discussion de l'équation générale du second degré entre deux variables.

29. Nous avons reconnu (chap. II) que toute ligne droite était représentée par l'équation $y=ax+b$; réciproquement une équation du premier degré à deux variables ne peut convenir qu'à une série de points en ligne droite ; car on en tire

$$\frac{y-b}{x}=a\,;$$

or $y-b$ est l'ordonnée rapportée à un axe des abscisses, parallèle à l'axe primitif et à une distance b de celui-ci, et comme le rapport de cette ordonnée à son abscisse x est une constante a, il s'ensuit que *le lieu* des extrémités des ordonnées, est une ligne droite.

30. Nous allons maintenant considérer l'équation la plus générale du second degré entre deux variables, qui est la suivante,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ldots\ (1),$$

A, B, C, D, E, F étant des coefficiens donnés, et nous chercherons à construire et à énumérer les lignes qu'elle représente, et que nous nommerons *lignes du second degré*, ou *courbes du premier ordre*, puisqu'elles ne peuvent être des droites, ainsi que nous le reconnaîtrons bientôt. La lettre x représentera toujours l'abscisse qu'on se donne, et de laquelle on conclut, d'après l'équation, l'ordonnée y correspondante. Ainsi en considérant l'abscisse x comme connue, nous résoudrons, une fois pour toutes, l'équation par rapport à y : à cet effet, nous l'ordonnerons suivant y de cette manière,

$$Ay^2+(Bx+D)\,y+(Cx^2+Ex+F)=0\,;$$

en divisant par A et résolvant, on obtient

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{[(B^2-4AC)\,x^2 + 2\,(BD-2AE)\,x + D^2 - 4AF]} \ldots (2).$$

Cette formule des valeurs de y est composée de deux parties qu'il faut soigneusement distinguer : l'une $-\frac{Bx+D}{2A}$ est rationnelle ; l'autre est $+$ et $-\sqrt{[\qquad]}$. Occupons-nous d'abord de la première, et représentons par Y la portion correspondante de l'ordonnée y : on aura donc à construire la droite

$$Y = -\frac{Bx+D}{2A};$$

en supposant que les points de la ligne représentée par (1) soient rapportés à des axes rectangulaires AX, AY, prenons (fig. 49)

$$AF = -\frac{D}{2A},$$

valeur de Y pour $x = 0$, et menons FG parallèle à AX et FH faisant avec FG un angle dont la tangente soit $-\frac{B}{2A}$; nous aurons pour $AP = x$,

$$PP' = Y = -\frac{Bx+D}{2A} \ldots (3);$$

pour la même abscisse AP, le radical, multiplié par $\frac{1}{2A}$ sera une longueur à porter de P′ en M′ pour le signe $-$, c'est-à-dire, dans le prolongement de l'ordonnée PP′ supposée négative, et de P′ en M pour le signe $+$; ensorte que M et M′ seront deux points de la ligne de l'équation (1), correspondans à l'abscisse AP. En effet, en désignant par y', y'' les deux valeurs correspondantes de y, données par (2), on a

$$y' = -PM = -PP' + P'M, \quad y'' = -PM' = -PP' - P'M'.$$

On répétera la même construction pour toute abscisse x,

ayant soin, dans les cas particuliers, de tenir compte, dans la construction, des signes des coefficiens A, B...F.

31. La droite FH de l'équation (3) jouit donc de la propriété de diviser en deux parties égales toutes les transversales ou cordes MM′ de la courbe, parallèle à AY, propriété qui l'a fait nommer *diamètre de la courbe.*

La première recherche à faire est celle des points dans lesquels la courbe peut couper ce diamètre : or ce qui caractérise ces points, et ce qui ne caractérise qu'eux, c'est que pour ces intersections, l'ordonnée de la courbe ne diffère pas de celle du diamètre : donc les abscisses de ces points seront données par l'égalité à zéro du radical : ainsi on doit poser

$$\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]}=0,$$

ou

$$(B^2-4AC)\left[x^2+\frac{2(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right]=0\,;$$

résolvant cette équation, c'est-à-dire, le facteur entre les parenthèses, parce qu'on n'a pas généralement $B^2-4AC=0$, on trouve ces deux valeurs de x,

$$x=\frac{-(BD-2AE)\pm\sqrt{[(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)]}}{B^2-4AC}\ldots(4):$$

la condition de réalité de ces deux racines que nous désignerons par x', x'', est donc

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0,$$

ou bien, en effectuant les opérations,

$$4A(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)>0\ldots.(5).$$

Pour construire ces abscisses x', x'', on portera, à l'imitation de ce qu'on a fait plus haut pour construire l'ordonnée y, une longueur $-\dfrac{BD-2AE}{B^2-4AC}$, de A en C, si elle est positive, et à gauche de A, si elle est négative ; puis, à partir de C, on prendra $CB'=\dfrac{+\sqrt{[\quad]}}{B^2-4AC}$, et $CB=-\dfrac{\sqrt{[\quad]}}{B^2-4AC}$: par

ces points B, B′ on mènera les ordonnées Ba, $B'a'$, et les points a, a' qui sont en même temps sur la courbe et sur le diamètre FH, ont pour ordonnées

$$y = -\frac{Bx' + D}{2A}, \quad y = -\frac{Bx'' + D}{2A}.$$

On observera qu'à cause de $CB' = CB$, on a $C'a' = C'a$, ce qui fait donner à ce point C′ la dénomination de *centre* de la courbe : nous verrons plus loin que toute droite menée par ce point et terminée à la courbe, est divisée au centre également. Si l'on désigne par X et Y les coordonnées de C′, qu'on sait être

$$(6) \ldots\ldots X = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}, \quad Y = -\frac{BX + D}{2A},$$

on trouve

$$Y = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Sous la relation

$$4A(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF) < 0 \ldots (8),$$

les racines x', x'' sont imaginaires, ensorte que la courbe ne coupe plus le diamètre FH ; d'où il ne faut cependant pas conclure que la courbe soit imaginaire, parce qu'elle pourrait être située au-dessus ou au-dessous de ce diamètre. Enfin sous la relation

$$4A(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF) = 0 \ldots (9):$$

les intersections a et a' se réunissent au centre C′, puisque les abscisses $AB = x'$, $AB' = x''$ deviennent AC.

32. Mais on peut aussi se donner y et conclure x ; alors les y sont les abscisses, et les x deviennent ordonnées, et on dit que la courbe est construite sur l'axe des y. Dans ce cas, on écrit l'équation (1) sous la forme

$$Cx^2 + (By + E)x + (Ay^2 + Dy + F) = 0,$$

et la résolution donne

$$x = -\frac{By+E}{2C}$$

$$\pm \frac{1}{2C}\sqrt{[(B^2-4AC)y^2+2(BE-2CD)y+E^2-4CF]} \ldots (10).$$

Avant de construire, il sera bon d'observer que pour passer de la formule des racines y à celle des racines x, il suffit de changer dans la première y en x, et conséquemment x en y, puis A en C, D en E, et réciproquement, c'est-à-dire, en conservant B et F, de changer dans la formule (2) les coefficiens de y en ceux de x, et réciproquement.

On construira d'abord la partie rationnelle de la valeur de x, représentée par $-\frac{By+E}{2C}$, laquelle donnera la ligne droite F′H′, et pour une abscisse $y=AQ$, il faudra alonger l'ordonnée correspondante $x=QQ'$ de $Q'N = \frac{1}{2C}\sqrt{[\quad]}$, et la diminuer de $Q'N' = -\frac{1}{2C}\sqrt{[\quad]}$; d'où il résulte que les transversales ou cordes de la courbe, parallèles à l'axe AX, sont divisées également par cette droite F′H′ qu'on nomme encore *diamètre*. Les abscisses Ab, Ab' des intersections a, a' de la courbe avec ce diamètre, sont aussi données par l'égalité à zéro du polynome sous le radical dans (10), c'est-à-dire, par

$$y^2 + 2\frac{(BE-2CD)}{B^2-4AC}y + \frac{E^2-4CF}{B^2-4AC} = 0 \ldots (11);$$

or ces racines sont réelles, si

$$4C(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF) > 0 \ldots (12),$$

imaginaires, si

$$4C(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF) < 0 \ldots (13),$$

égales, si

$$4C(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF) = 0 \ldots (14).$$

Il est facile de reconnaître que les deux diamètres FH,

$F'H'$ se coupent au centre C' de la courbe ; car si, pour trouver leur intersection, on suppose mêmes coordonnées dans leurs équations qui sont les parties rationnelles des formules (2) et (10), savoir :

$$Y = -\frac{BX+D}{2A}, \quad X = -\frac{BY+E}{2C},$$

on trouve

$$X = -\frac{BD-2AE}{B^2-4AC},$$

qui est l'abscisse déjà trouvée du centre.

Lorsque la courbe rencontre ces deux diamètres, ce qui a lieu sous les conditions (5) et (12), on sait trouver quatre de ses points ; on peut, dans plusieurs cas, en obtenir quatre autres. Si, par exemple, on veut trouver les points dans lesquels la courbe peut couper l'axe des abscisses, il faut faire $y=0$ dans l'équation (1), hypothèse qui la réduit à

$$Cx^2 + Ex + F = 0 \ldots (15);$$

d'où résultent ces deux abscisses,

$$x = \frac{-E \pm \sqrt{E^2-4CF}}{2C};$$

elles seront réelles, égales ou imaginaires, suivant qu'on aura

$$E^2 - 4CF > 0, \quad =0, \quad < 0:$$

dans le second cas, les deux intersections se réduiront à une seule, ensorte que l'axe des x n'aura qu'un point commun avec la courbe à laquelle il sera tangent, comme on le verra mieux dans le chapitre des tangentes.

En faisant $x=0$ dans (1), cette équation se réduit à

$$Ay^2 + Dy + F = 0,$$

et les ordonnées des intersections de la courbe avec l'axe des y, sont

$$y = -\frac{D \pm \sqrt{D^2-4AF}}{2A} \ldots (16);$$

ces ordonnées sont réelles, égales ou imaginaires, suivant l'une ou l'autre de ces relations

$$D^2 - 4AF > 0, \quad = 0, \quad < 0:$$

sous la relation intermédiaire, l'axe des y sera tangent à la courbe.

33. Nous reprendrons ce qui précède, sous un point de vue différent.

Si dans la formule (2) des racines y, on fait passer la partie rationnelle dans le premier membre, si l'on multiplie de part et d'autre par $2A$, et qu'on élève au carré, on trouvera

$$(2Ay+Bx+D)^2 = (B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF,$$

c'est-à-dire,

$$(2Ay+Bx+D)^2 - [(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF] = 0;$$

or

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x = \frac{1}{B^2-4AC}[(B^2-4AC)x+BD-2AE]^2 - \frac{(BD-2AE)^2}{B^2-4AC};$$

donc l'équation précédente revient à

$$(B^2-4AC)(2Ay+Bx+D)^2-[(B^2-4AC)x+BD-2AE]^2 + [(BD-2AE)^2-(D^2-4AF)(B^2-4AC)] = 0:$$

comme la quantité entre crochets, n'est autre chose que

$$4A(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF),$$

si l'on désigne par M le facteur de $4A$, on obtient enfin cette transformée de l'équation générale

$$(B^2-4AC)(2Ay+Bx+D)^2-[(B^2-4AC)x+BD-2AE]^2 + 4AM = 0 \ldots (17).$$

En partant de la formule (10), on serait conduit à cette transformée

$$(B^2-4AC)(2Cx+By+E)^2-[(B^2-4AC)y+(BE-2CD)]^2 \\ +4CM=0\ldots(18).$$

Du rapprochement de ces deux transformées, on conclut que si les coefficiens A et C sont de même signe, et, dans ce cas, on peut toujours les ramener à avoir le signe plus, la possibilité ou l'impossibilité de la proposée, ne dépendra plus que des signes des quantités B^2-4AC et M. En effet, B^2-4AC et M étant négatifs, chacun des premiers membres (17) et (18), qui devient la somme de trois termes de même signe, ne peut être nul, ensorte qu'alors la proposée ne représente rien, conclusion encore vraie pour $M=0$: mais lorsque M est positif, B^2-4AC étant toujours négatif, les premiers membres (17) et (18) étant composés de termes affectés de différens signes, peuvent remplir la condition de l'égalité à zéro, et la proposée peut être satisfaite par des coordonnées réelles. La quantité B^2-4AC étant positive, ce qui arrive nécessairement lorsque les coefficiens A et C ont des signes contraires, les égalités (17) et (18) sont toujours possibles sous les deux signes de M, et lors même que $M=0$. Il resterait à supposer $B^2-4AC=0$ avec $M<0$, $=0$, >0; mais ces cas qui ne laissent plus de difficultés, seront examinés dans les numéros suivans.

34. Nous passerons à l'énumération des courbes représentées par l'équation générale (1). Les racines y données par la formule générale

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}$$

$$\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]},$$

seront réelles pour les valeurs de x qui rendront positif le trinome sous le radical, et elles seront imaginaires pour les abscisses x qui rendront ce trinome négatif : or on a vu

(Alg., Ire sect., chap. XXVIII) qu'on pouvait toujours assigner pour x une valeur telle que le signe de ce trinome, ne dépendît plus que de celui du terme de plus haute puissance de x, ou seulement du signe de son coefficient B^2-4AC, quand le plus haut exposant de x est pair comme ici; et on a démontré de plus que le signe de ce trinome ne changeait plus pour des valeurs de x, indéfiniment plus grandes. Ainsi les racines y finiront toujours par devenir réelles ou imaginaires, suivant que le coefficient B^2-4AC sera >0 ou <0; et s'il est nul, la réalité ou l'imaginarité de ces racines y, dépendra du signe de $BD-2AE$. Nous aurons donc à considérer les trois relations

$$B^2-4AC<0, \quad =0, \quad >0.$$

Courbes caractérisées par $B^2-4AC<0$.

35. La formule générale des racines y peut être énoncée de cette manière :

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')]}\ldots(19),$$

en observant qu'on a dénoté par x', x'' les abscisses des intersections de la courbe avec le diamètre FH, données par la formule (4), lesquelles peuvent être réelles inégales, réelles égales, ou imaginaires, circonstances annoncées par les relations (5), (9) et (8).

Supposons d'abord les racines x', x'' réelles inégales : lorsque la valeur attribuée à x, sera $>x'=AB$ et $<x''=AB'$ (fig. 50), les facteurs $x-x'$, $x-x''$ prenant des signes contraires, leur produit sera négatif, et conséquemment la quantité sous le radical, sera positive, et la double valeur de y sera réelle.

Pour $x=x'=AB$ et $x=x''=AB'$, le radical s'évanouira, et les ordonnées correspondantes seront celles des intersections a et a' de la courbe avec le diamètre FH.

Pour $x > x''$, et, à plus forte raison, $> x'$, le radical et les valeurs de y deviennent imaginaires : il en est de même pour $x < x'$, et conséquemment $< x''$.

La courbe est donc tout entière comprise entre deux limites Ba, $B'a'$ parallèles à l'axe des y, limites dont on peut toujours assigner la position.

Passons au cas des racines réelles et égales : la formule générale (19) devient alors

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{x-x'}{2A}\sqrt{B^2-4AC}\ldots(20);$$

pour $x >$ ou $< x'$, les deux racines y sont imaginaires ; pour $x = x'$, elles se réduisent à une seule qui est

$$y = -\frac{Bx'+D}{2A},$$

ordonnée du centre C', puisque x' est l'abscisse de ce point.

Que les deux racines x', x'' soient imaginaires : le trinome facteur de $B^2 - 4AC$ sous le radical

$$\sqrt{\left[(B^2-4AC)\left(x^2+\frac{2(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right)\right]},$$

ne pouvant changer de signe, quelque valeur qu'on donne à x (Alg., I^re sect., chap. XXVIII), doit conserver le signe de x^2, et conséquemment le produit sous le radical, conservera le signe de $B^2 - 4AC$; donc les valeurs de y seront indéfiniment imaginaires ; ensorte que la courbe n'aura pas d'intersections avec le diamètre FH.

Si l'on observe que le caractère $B^2 - 4AC < 0$ suppose essentiellement que les coefficiens A et C aient le même signe, on déduira du rapprochement des conditions (5) et (12), (8) et (13), (9) et (14), dans lesquelles les facteurs entre parenthèses sont identiquement les mêmes, que les racines y' et y'' sont réelles inégales, imaginaires, réelles et égales en même temps que les racines x', x'' : ainsi, dans le premier cas, la courbe aura deux autres limites ba, $b'a'$ parallèles à l'axe des x (fig. 50) ; dans

le second, elle n'aura pas d'intersections avec le diamètre $F'H'$, et à toutes les valeurs de l'abscisse y, correspondront des ordonnées x imaginaires : dans le troisième, la courbe n'aura qu'un seul point qui sera le centre C'. Il résulte encore de ce qui précède, que, sous le caractère $B^2-4AC<0$, la courbe ne peut exister sans couper ses deux diamètres FH, $F'H'$, et que si elle n'a pas d'intersections avec l'un de ces diamètres, elle n'en aura pas avec l'autre, et qu'elle n'existera pas.

Cette courbe fermée et rentrante sur elle-même, se nomme *ellipse*.

Il résulte encore du caractère de l'ellipse $B^2-4AC<0$, qu'on peut avoir $B=0$, pourvu que les coefficiens A et C aient le même signe : dans ce cas, les diamètres FH, $F'H'$ deviennent parallèles aux axes AX, AY ; si de plus $A=C$, l'équation générale divisée par A, devient

$$y^2+x^2+\frac{D}{A}y+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(y+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(x+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}\ldots(21).$$

Comme les coordonnées du centre (6) et (7) deviennent alors

$$X=-\frac{E}{2A},\quad Y=-\frac{D}{2A},$$

si l'on transporte l'origine au centre, en laissant les axes variés parallèles aux axes primitifs, ce qui exige l'emploi de ces formules (chap. III, probl. I)

$$x=a+x';\quad y=b+y',$$

d'où l'on déduit

$$x=x'-\frac{E}{2A},\quad y=y'-\frac{D}{2A},$$

on trouvera, par ces substitutions dans (21), la transformée

$$y'^2+x'^2=R^2,$$

où $R^2 = \frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$: c'est l'équation d'un cercle dont le centre est l'origine des coordonnées.

Il est facile de prouver que, dans l'ellipse, les diamètres FH et F'H' ne peuvent être à angles droits, qu'autant que B est nul; car autrement, les équations de ces diamètres étant

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}, \quad y = -\frac{2C}{B}x - \frac{E}{B},$$

et la condition de perpendicularité (chap. II, prob. IV), devenant

$$\frac{2BC}{2AB} + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad A = -C;$$

le caractère $B^2 - 4AC < 0$ n'aurait plus lieu.

Les dégénérations de l'ellipse sont donc le point, la courbe imaginaire, et le cercle qui offrent ces deux circonstances.

Exemple. Proposons-nous de discuter et de construire quelques points de la courbe représentée par l'équation

$$(x-y)^2 + 3(x+y)^2 = a:$$

cette équation revient à

$$y^2 + xy + x^2 = \frac{a}{4},$$

dont la résolution donne

$$y = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{-3x^2+a}}{2}.$$

Comme le coefficient de x^2, sous le radical, est négatif, il arrivera que pour des valeurs de x, tant positives que négatives et telles qu'on ait $3x^2 > a$, les coordonnées y seront imaginaires, tandis qu'elles seront réelles pour les abscisses x qui rendront $3x^2 < a$: la courbe sera donc du genre de l'ellipse : elle ne pourra être un cercle, puisque l'équation renferme le terme du rectangle. Le diamètre FH (fig. 51) est donné par

$$y = -\frac{x}{2};$$

il passe donc par l'origine, et on en trouve un second point en prenant une abscisse $x=1$, et menant par l'extrémité une ordonnée $=-\frac{1}{2}$: les abscisses des intersections de la courbe avec ce diamètre, sont données par

$$-3x^2+a=0, \quad \text{d'où} \quad x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}};$$

on les portera de A en B et en B', AB étant $=$ AB', puis par B et B', on menera les perpendiculaires prolongées jusqu'au diamètre FH : les limites de la courbe, parallèles aux y, sont donc

$$Ba=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad B'a'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Pour $x>\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$, les ordonnées y sont constamment imaginaires.

En résolvant la proposée par rapport à x, on trouverait

$$x=-\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{-3y^2+a}}{2},$$

et pour équation du second diamètre F'H',

$$x=-\frac{y}{2}, \quad \text{d'où} \quad y=-2x;$$

donc l'origine est le centre de la courbe. Après avoir construit ce diamètre, en portant par l'extrémité de $x=1$, l'ordonnée -2, on tirera les abscisses des intersections de la courbe avec F'H', de l'équation

$$-3y^2+a=0, \quad \text{d'où} \quad y=\pm\sqrt{\frac{a}{3}};$$

ayant donc pris $Ab=Ab'=\sqrt{\frac{a}{3}}$, et élevé les perpendiculaires $b\alpha=b\alpha'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$, qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de F'H', on aura deux nouveaux points α, α' de la courbe, et les limites $b\alpha$, $b'\alpha'$ de la courbe parallèles à l'axe des x. Cherchons les intersections, s'il y en a, avec les axes

des y et des x : pour $x=0$, l'équation donne

$$y=\pm\frac{\sqrt{a}}{2}:$$

ayant donc pris $AR=AR'=\frac{\sqrt{a}}{2}$, on aura en R et R' deux nouveaux points de la courbe : à $y=0$ répondent

$$x=\pm\frac{\sqrt{a}}{2},$$

qu'on portera de A en r et r'. Nous avons donc, en totalité, six points de la courbe, et il serait facile, en se donnant des abscisses tant positives que négatives, en progression par différences égales, et concluant les ordonnées correspondantes, de les multiplier à tel point que le trait qui les joindrait, la représentât avec une exactitude suffisante ; mais elle sera plus facile à décrire, et même on pourra le faire par un mouvement continu, lorsqu'on connaîtra ses axes principaux, comme on le verra dans la suite.

Supposons que l'équation manque du terme tout connu, ou, en d'autres termes, que a diminue jusqu'à devenir zéro : la formule des racines y, qui devient alors

$$y=-\frac{x}{2}\pm\frac{\sqrt{-3x^2}}{2}$$

annonce que, pour toute valeur de x, autre que zéro, les ordonnées sont imaginaires : pour $x=0$, on a $y=0$; la courbe est donc réduite à un point qui est le centre de la courbe, lorsqu'elle existait.

Si le terme tout connu devenait $-a$, les ordonnées

$$y=-\frac{x}{2}\pm\frac{\sqrt{-3x^2-a}}{2}$$

seraient indéfiniment imaginaires, et la courbe n'existerait plus.

Supposons enfin que le terme du rectangle manque dans

la proposée, ce qui revient à l'hypothèse $B=0$, c'est-à-dire, qu'on ait à construire la courbe de l'équation

$$4y^2+4x^2-a=0;$$

on en tire

$$y=\pm\frac{\sqrt{-4x^2+a}}{2},\quad x=\pm\frac{\sqrt{-4y^2+a}}{2}:$$

les deux diamètres sont les axes coordonnés eux-mêmes; les intersections a, a' tombent en r et r'; celles α, α' tombent en R et R′ : on sait d'ailleurs que la courbe est un cercle, puis qu'outre $B=0$, on a $A=C$, ces deux coefficiens ayant même signe.

Les élèves feront bien de s'exercer sur un grand nombre d'équations, en appliquant immédiatement à chacune d'elles, les raisonnemens faits sur l'équation générale, et sans recourir à la comparaison : de cette manière, ils se familiariseront avec la marche de la discussion, qui est la seule chose à retenir.

Courbes caractérisées par $B^2-4AC=0$.

36. La formule générale des racines y, se simplifie dans cette hypothèse, et elle devient

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)]}\ldots(22);$$

l'abscisse AB (fig. 32) de l'unique intersection a de la courbe, avec le diamètre FH, est donnée par

$$2(BD-2AE)x+D^2-4AF=0,$$

d'où

$$x=-\frac{D^2-4AF}{2(BD-2AE)}=x';$$

et la formule (2) devient, en y introduisant cette abscisse,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[2(BD-2AE)(x-x')]}\ldots(23).$$

Supposons positifs l'abscisse $x' = AB$ (fig. 52), ainsi que le coefficient $BD - 2AE$: pour toute abscisse $x > x'$, le facteur $x - x'$ sera positif, et les ordonnées y seront réelles : mais pour $x < x'$, ces ordonnées seront toujours imaginaires, ainsi que pour toute abscisse x négative : la courbe s'étendra donc indéfiniment à droite de la limite Ba. Pour l'abscisse x', toujours positive, si le coefficient $BD - 2AE$ est négatif, la courbe sera située à gauche de la limite Ba. On reconnaîtra sans peine la position de la courbe correspondante à l'abscisse x' négative, le coefficient $BD - 2AE$ étant positif ou négatif. La courbe du caractère $B^2 - 4AC = 0$, indéfinie dans un sens seulement, se nomme *parabole*.

Qu'on résolve l'équation par rapport à x, et on aura

$$x = -\frac{By+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{[2(BE-2CD)\,y + E^2 - 4CF]} \ldots (24);$$

l'équation du diamètre F'H' sera donc

$$X = -\frac{By+E}{2C}, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{2C}{B}X - \frac{E}{B} \ldots (25);$$

mais le caractère $B^2 - 4AC = 0$, donne

$$\frac{2C}{B} = \frac{B}{2A},$$

relation qui portée dans (25), transforme cette équation dans la suivante,

$$y = -\frac{B}{2A}X - \frac{E}{B} \ldots (26);$$

cette équation comparée avec celle du diamètre FH,

$$y = -\frac{B}{2A}X - \frac{D}{2A}$$

donnée par l'équation (23), fait voir que les diamètres FH, F'H' sont parallèles, puisqu'ils font le même angle avec l'axe des abscisses. Ce parallélisme s'applique facilement : en effet, nous avons démontré (32), sans particulariser l'espèce de courbe,

que les deux diamètres se coupaient au centre, et d'ailleurs nous avons trouvé pour l'abscisse de ce point,

$$x = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC};$$

or, pour la parabole, cette expression devenant infinie, les diamètres ne se rencontrent plus; ils sont donc parallèles.

Le caractère $B^2 - 4AC = 0$ a encore lieu si, avec $B = 0$, on a A ou $C = 0$: or pour $B = 0$ et $A = 0$, il n'existe plus que le diamètre F'H' parallèle à l'axe des y, puisque son équation (25) devient

$$X = -\frac{E}{2C}:$$

celle de l'autre diamètre FH étant réduite à

$$y = -\frac{D}{0},$$

la construction de ce diamètre est impossible : on conçoit en effet qu'il ne peut satisfaire en même temps à la condition d'être parallèle au précédent, et de couper également les transversales ou cordes parallèles aux y. Le contraire arrive sous les hypothèses $B = 0$, $C = 0$.

Mais sans que la relation $B^2 - 4AC = 0$ soit altérée, il peut arriver qu'on ait

$$BD - 2AE = 0,$$

auquel cas la formule (22) se réduit à

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF} \ldots (27):$$

or des relations

$$B^2 - 4AC = 0, \qquad BD - 2AE = 0 \ldots (28),$$

on déduit

$$\frac{B}{D} = \frac{2C}{E}, \qquad \text{d'où} \qquad BE - 2CD = 0;$$

donc l'équation (24) se réduit à

$$x = -\frac{By + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{E^2 - 4CF}\ldots\ldots(29).$$

Chacune des formules (27) et (29) donne donc deux droites, et il s'agit de prouver que ces formules répètent les deux mêmes droites. Les diamètres donnés par les équations (27) et (29) sont

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}, \quad y = -\frac{2C}{B}x - \frac{E}{B};$$

mais des deux relations (28), on déduit encore

$$\frac{B}{2A} = \frac{2C}{B}, \quad \frac{D}{2A} = \frac{E}{B};$$

donc d'abord ces deux diamètres n'en font qu'un. Si l'on tire de (29) la valeur de y, on trouve

$$y = -\frac{2Cx + E}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{E^2 - 4CF}\ldots\ldots(30).$$

Les formules (27) et (30) reviennent aux suivantes

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D^2}{4A} - F},$$

$$y = -\frac{2Cx + E}{B} \pm \frac{2\sqrt{C}}{B}\sqrt{\frac{E^2}{4C} - F};$$

or on a déjà

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{2\sqrt{C}}{B},$$

d'après la caractéristique $B^2 - 4AC = 0$; d'ailleurs de $BD - 2AE = 0$, on déduit

$$\frac{D}{2A} = \frac{E}{B}, \quad \text{d'où} \quad \frac{D^2}{4A} = \frac{AE^2}{B^2} = \frac{AE^2}{4AC} = \frac{E^2}{4C};$$

donc les parties irrationnelles sont les mêmes.

Sous ces relations

$$D^2 - 4AF > 0, \quad = 0, \quad < 0,$$

l'équation (27) représentera le système de deux droites, ou une seule droite qui sera le diamètre FH, ou elle sera impossible. On peut concevoir cette dégénération de la parabole en deux droites, en supposant que l'abscisse

$$x' = AB = -\frac{D^2 - 4AF}{2(BD - 2AE)}$$

de l'intersection de la courbe avec le diamètre, ait augmenté par les diminutions successives du dénominateur décroissant jusqu'à zéro : alors les deux portions ma, $m'a$ (fig. 53) vont se raccorder en des points a successivement plus éloignés ; et enfin ces deux portions de la courbe ne se rencontrant qu'à l'infini, se rectifient suivant deux directions RL, R'L', parallèles au diamètre FH. Si l'on a, en même temps, $D^2 - 4AF = 0$, l'abscisse x' devenant $\frac{0}{0}$ par deux hypothèses, indique (Alg., 1re sect.) que tout point de FH est une intersection de la courbe, telle que a ; donc la courbe se change dans ce diamètre.

37. Pour mieux expliquer les deux faits précédens, qu'on multiplie l'une par l'autre les deux équations

$$y - ax - b = 0, \qquad y - a'x - b' = 0,$$

et on trouvera le produit

$$\begin{aligned} y^2 - (a + a')xy + aa'x^2 - (b + b')y \\ + (a'b + ab')x + bb' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (31) ; \end{aligned}$$

et d'abord la quantité

$$B^2 - 4AC = a^2 + 2aa' + a'^2 - 4aa' = (a - a')^2$$

est toujours nulle pour $a = a'$, auquel cas les droites sont parallèles ; en même temps,

$$BD - 2AE = (a + a')(b + b') - 2(a'b + ab') = 0,$$

et

$$D^2 - 4AF = (b + b')^2 - 4bb' = (b - b')^2 > 0.$$

Donc, sous ces trois hypothèses, l'équation est bien le produit des équations de deux droites parallèles. Si avec $a = a'$, on a encore $b = b'$, les deux droites n'en font plus qu'une.

Ainsi, sous le caractère $B^2 - 4AC = 0$, l'équation peut représenter une parabole, deux droites parallèles, une seule droite, ou elle ne représente rien.

Exemple Ier. Soit l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - x = 1 :$$

sa résolution par rapport à y donne

$$y = x \pm \sqrt{x + 1} ;$$

aux abscisses x positives correspondent indéfiniment des ordonnées y réelles : pour toute abscisse négative et moindre que l'unité, on a encore de telles ordonnées ; pour $x = -1$, le radical est nul, et l'ordonnée devient celle de la droite $y = x$: enfin, pour des abscisses négatives et linéairement plus grandes que l'unité, l'ordonnée devient et reste indéfiniment imaginaire ; la courbe est donc indéfinie dans un sens, et limitée dans l'autre ; elle est une parabole. Le diamètre FH (fig. 54) donné par

$$y = x,$$

passe par l'origine A, et fait avec l'axe des x un angle de 50°; l'abscisse de l'intersection de la courbe avec ce diamètre, résulte de

$$x + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -1 = AB ;$$

et on obtient cette intersection en menant par B l'ordonnée Ba du diamètre. La résolution de l'équation par rapport à x, donne

$$x = y + \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{y + \tfrac{5}{4}} ;$$

le diamètre F'H' est donc

$$x = y + \tfrac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad y = x - \tfrac{1}{2},$$

dont les intersections avec les axes des x et des y, sont

$$x = \tfrac{1}{2} = Ai, \quad y = -\tfrac{1}{2} = Ai';$$

et celle de la courbe avec ce diamètre, a pour abscisse

$$Ab = -\tfrac{5}{4} = -1 - \tfrac{1}{4}.$$

A l'hypothèse $x = 0$ répondent

$$y = 1 = AR, \quad y = -1 = AR',$$

et pour $y = 0$, on obtient

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est $> \frac{3}{2}$ et < 2, et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ est, abstraction faite du signe, $> \frac{1}{2}$ et < 1 : ces deux valeurs de x sont représentées la première par Ar, et la seconde par Ar'.

Si l'on supprime le terme $-x$ dans la proposée, elle deviendra

$$y^2 - 2xy + x^2 = 1,$$

et on en déduit ces deux formules

$$y = x \pm 1, \quad x = y \pm 1,$$

qui représentent deux droites parallèles entr'elles, et ayant pour diamètre une droite qui leur est parallèle.

Que dans l'équation précédente, on anéantisse le terme tout connu, la résultante

$$y^2 - 2xy + x^2 = 0$$

donnera $y = x$, c'est-à-dire une droite. Que dans la même équation, on change $+1$ en -1, et les deux droites

$$y = x \pm \sqrt{-1}$$

seront imaginaires.

Exemple II. Soit l'équation

$$x^2 + y - x = 0:$$

résolue par rapport à x, elle donnera

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-4y+1}}{2},$$

et comme les valeurs de x ne peuvent être réelles qu'autant que

$$y = \quad \text{ou} \quad < \tfrac{1}{4},$$

on conclura que la courbe est imaginaire au-delà de

$$y = + \tfrac{1}{4};$$

qu'ainsi elle est une parabole. Son diamètre F'H' (fig. 55) a pour équation

$$x = \tfrac{1}{2},$$

et l'abscisse de l'intersection de la courbe avec ce diamètre, est

$$y = \tfrac{1}{4}.$$

Pour avoir l'autre diamètre FH, il faudrait résoudre la proposée par rapport à y; mais comme elle n'est que du premier degré par rapport à cette variable, on en conclut que ce diamètre est impossible.

Les intersections de la courbe avec l'axe des y, résultent de $x = 0$, hypothèse pour laquelle on a $y = 0$; ensorte que la courbe passe par l'origine A : pour $y = 0$, on trouve $x = 0$, $x = 1 = \mathrm{AR}$.

Ces deux exemples serviront à faire mieux entendre la théorie, et à guider les élèves dans la discussion des équations des courbes paraboliques.

Courbes caractérisées par $B^2 - 4AC > 0$.

38. Reprenons la formule des racines (35), savoir,

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')]},$$

x', x'' désignant les abscisses AB, AB′ (fig. 56) des intersections de la courbe avec le diamètre donné par la partie rationnelle, et supposons d'abord ces racines x', x'' réelles et inégales. Pour $x < x''$ et $> x'$, les ordonnées y seront imaginaires : la courbe n'aura donc aucun point entre les limites Ba, $B'a'$: pour $x > x''$ et conséquemment $> x'$, les ordonnées y seront indéfiniment réelles ; il en sera de même pour $x < x'$ et, *à fortiori*, $< x''$: ainsi la courbe sera composée de deux branches situées l'une à droite de la limite $B'a'$, l'autre à gauche de la limite Ba. Cette courbe se nomme *hyperbole*.

Les racines x', x'' étant réelles et égales, la formule précédente devient

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{x-x'}{2A}\sqrt{B^2-4AC} \ldots (32),$$

équation de deux droites réelles et qui ne sont plus parallèles comme dans la parabole, parce que le coefficient de x change en passant d'une droite à l'autre. Dans ce cas, le produit des équations de deux droites (37), pour lequel $A = 1$, $B = -(a+a')$, $C = aa'$, est tel que

$$B^2 - 4AC = (a+a')^2 - 4aa' = (a-a')^2 > 0,$$

et qu'en même temps

$$4A(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF) = 0,$$

condition sous laquelle les racines x', x'' deviennent égales (31 et 32). Ainsi l'équation de l'hyperbole se change alors dans le

produit de deux droites non parallèles, que nous allons démontrer se couper au centre. En effet, il résulte de la formule (32) que pour $x = x'$, l'ordonnée correspondante qui est celle du centre, est, en même temps, l'ordonnée de l'intersection des deux droites; de plus, ces deux droites sont placées symétriquement par rapport au diamètre FH.

Supposons enfin les racines x', x'' imaginaires : alors la courbe ne peut couper le diamètre FH; cependant comme le trinome facteur de ($B^2 - 4AC$), sous le radical, dans la formule générale des racines y, ne peut changer de signe (Alg., 1re sect., chap. XXVIII), et qu'il prend alors celui de $B^2 - 4AC$, le radical reste réel pour toutes les abscisses x; la courbe existe donc.

Nous avons reconnu, par rapport à l'ellipse, que les racines x', x'' devenaient imaginaires en même temps que y', y''; la même chose n'a pas nécessairement lieu dans l'hyperbole, et pour s'en convaincre, qu'on se reporte à ces formules (31 et 32),

$$4A\,(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF),$$
$$4C\,(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF),$$

dont on sait que le signe détermine la réalité et l'imaginarité des racines x' et x'', y' et y''; et on en conclura que lorsque les coefficiens A et C ont même signe, ces racines sont réelles ou imaginaires en même temps, et que lorsqu'ils ont des signes contraires, ce qui est compatible avec le caractère hyperbolique, les racines x', x'' sont réelles, tandis que y' et y'' sont imaginaires, ou réciproquement : c'est ce qui explique comment l'hyperbole peut, au défaut d'intersections avec l'un de ces diamètres, en avoir avec l'autre, et comment elle peut ne les couper ni l'un ni l'autre, et cependant exister. On remarque en même temps que, sous la relation $B^2 - 4AC > 0$, l'équation générale (1) ne peut être impossible.

39. On a reconnu que sous les relations

$$4A \times M = 0, \quad 4C \times M = 0,$$

M étant $= AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF$, lesquelles ont lieu en même temps, lorsque les coefficiens A et C ne sont pas nuls, l'équation générale résolue soit par rapport à y, soit par rapport à x, annonce deux droites qui se coupent au centre. En effet, si l'on multiplie entr'elles les équations de deux droites non parallèles, savoir :

$$my - ax - b = 0, \quad ny - a'x - b' = 0,$$

on trouve pour produit

$$mny - (na + ma')xy + aa'x^2 - (mb' + nb)y$$
$$+ (a'b + ab')x + bb' = 0,$$

lequel comparé à l'équation générale, donne

$$A = mn, \quad B = -(na + ma'), \quad C = aa',$$
$$D = -(mb' + nb), \quad E = a'b + ab', \quad F = bb',$$

et il résulte de ces substitutions dans M, que

$$M = AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = 0.$$

Examinons maintenant ce qui arrive lorsque A étant nul, C n'est pas nul : la première condition étant satisfaite, sans que la seconde le soit, lorsqu'on ne suppose pas $M = 0$, l'équation générale ne présente plus le système de deux droites. En effet, si d'après la seule condition $4A \times M = 0$, satisfaite par $A = 0$, on se croyait en droit de conclure que l'équation générale représente deux droites, comme alors

$$M = CD^2 + FB^2 - BDE$$

devient nul par les substitutions des valeurs précédentes de A, B, C, etc., en supposant $m = 0$ à cause de $A = 0$, valeurs qui deviennent

$$B = -na, \quad C = aa', \quad D = -nb, \quad E = a'b + ab', \quad F = bb',$$

on serait ramené à $M=0$; alors les deux droites sont représentées par

$$ax+b=0,\quad ny-a'x-b'=0;$$

d'où l'on tire

$$x=-\frac{b}{a},\quad y=\frac{a'}{n}x+\frac{b'}{n},$$

et il reste à évaluer a, a', b et n en coefficiens de l'équation générale : d'après les relations ci-dessus, modifiées par l'hypothèse $m=0$, on a

$$\frac{b}{a}=\frac{D}{B},\quad \frac{a'}{n}=-\frac{C}{B},\quad \frac{b'}{n}=-\frac{F}{D}=\frac{CD-BE}{B^2},$$

en observant que de la condition $M=0$, savoir,

$$CD^2+FB^2-BDE=0,$$

on déduit

$$-\frac{F}{D}=\frac{CD-BE}{B^2}:$$

on aura donc ces équations

$$x=-\frac{D}{B},\quad y=-\frac{C}{B}x+\frac{CD-BE}{B^2},$$

telles qu'on les trouve d'après la formule

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{B}{2C}(y-y')$$
$$=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{B}{2C}\left[y-\frac{2CD-BE}{B^2}\right],$$

qui répond à l'égalité des racines y', y''.

On observera que pour $A=0$, l'équation générale résolue par rapport à y, donne

$$y=-\frac{Cx^2+Ex+F}{Bx+D}.$$

et que la condition sous laquelle cette formule représente une droite, consiste dans la divisibilité du numérateur par le dénominateur, ou dans l'égalité à zéro du reste indépendant de x, égalité qui est

$$CD^2 + FB^2 - BDE = 0 = M$$

pour $A = 0$; de cette manière on n'obtient que la droite

$$y = -\frac{C}{B}x + \frac{CD - BE}{B^2}.$$

Supposons enfin $A = 0$, $C = 0$: sous ces hypothèses, les relations

$$4A \times M = 0, \qquad 4C \times M = 0$$

sont bien satisfaites ; cependant il ne faut pas conclure qu'il y ait lieu à deux droites, à moins qu'on ait en même temps $M = 0$. En effet, les conséquences de $A = 0$, $C = 0$ sont

$$m = 0 \text{ et } a' = 0, \quad \text{ou} \quad n = 0 \text{ et } a = 0:$$

dans le premier cas,

$$B = -na, \quad D = -nb, \quad E = ab', \quad F = bb',$$

et la relation M devient alors

$$M = FB^2 - BDE = n^2a^2bb' - n^2a^2bb' = 0;$$

ensorte qu'on est encore ramené à $M = 0$, comme condition de l'existence de deux droites qui sont représentées par

$$x = -\frac{b}{a}, \quad y = \frac{b'}{n},$$

équations qui, d'après les relations ci-dessus, se transforment dans celles-ci,

$$x = -\frac{D}{B}, \quad y = -\frac{F}{D} = -\frac{E}{B}.$$

Dans les hypothèses ci-dessus, l'équation générale devient

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

d'où l'on déduit

$$y = -\frac{Ex + F}{Bx + D}, \quad x = -\frac{Dy + F}{By + E}:$$

faisant les divisions, et égalant à zéro le reste indépendant de x dans la première, et de y dans la seconde, on obtient cette condition unique

$$\frac{FB - DE}{B} = o, \quad \text{d'où} \quad FB - DE = o = M,$$

qui doit être satisfaite, pour que la proposée représente deux droites données par les équations ci-dessus.

L'équation

$$2xy + y + 2x + 1 = o,$$

pour laquelle $FB - DE = 1 \times 2 - 1 \times 2 = o$, donne

$$y = -\frac{2x + 1}{2x + 1} = -1, \quad x = -\frac{y + 1}{2(y + 1)} = -\tfrac{1}{2}.$$

40. Le caractère hyperbolique a lieu pour $A = o$, pour $C = o$, pour $A = C = o$: il a encore lieu si B étant nul, les cofficiens A et C ont des signes contraires.

Supposons d'abord $B = o$; les deux diamètres FH, F'H' deviennent respectivement parallèles aux axes, ce qu'on trouve en remontant aux équations de ces diamètres : ils sont donc rectangulaires. Si de plus $A = -C$, l'équation générale devient

$$Ay^2 - Ax^2 + Dy + Ex + F = o,$$

et après la division par A,

$$y^2 - x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = o;$$

les coordonnées du centre deviennent

$$y = -\frac{D}{2A}, \quad x = \frac{E}{2A},$$

et comme l'équation précédente de la courbe, peut être écrite

sous la forme

$$\left(y+\frac{D}{2A}\right)^2-\left(x-\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2-E^2-4AF}{4A^2},$$

on trouve, en la rapportant au centre par les substitutions,

$$x=x'+\frac{E}{2A}, \quad y=y'-\frac{D}{2A},$$

qu'elle devient

$$y'^2-x'^2=\frac{D^2-E^2-4AF}{4A^2}.$$

Cette hyperbole se nomme *équilatère* : elle est à l'hyperbole ordinaire, ce que le cercle est à l'ellipse. On donne encore ce nom à l'hyperbole pour laquelle $A=-C$. Si $D=E=F=0$, l'hyperbole équilatère se change dans les deux droites

$$y'^2-x'^2=0, \quad \text{d'ou} \quad y'=\pm x'.$$

Il serait fort aisé de prouver que les deux diamètres FH, F'H' ne peuvent être à angles droits que sous la relation $C=-A$, quelle que soit d'ailleurs la valeur de B.

Nous renverrons pour les exemples au chapitre suivant qui se rapporte particulièrement à l'hyperbole, et qui complette le dernier titre de celui-ci.

CHAPITRE V.

Des asymptotes.

41. Il conviendrait peut-être de ne parler des asymptotes qu'après avoir parlé des tangentes aux courbes, puisque l'asymptote n'est, dans le fait, qu'une tangente au dernier élément de chaque branche de l'hyperbole; mais comme le problème des tangentes se rapporte aux trois courbes comprises dans l'équation générale, tandis que l'hyperbole est la seule de ces courbes qui admette des asymptotes; et comme d'ailleurs l'analyse par laquelle nous allons déterminer ces asymptotes, n'a rien de commun avec celle des tangentes, nous traiterons ici la première question que nous reprendrons dans ce chapitre, sous un point de vue beaucoup plus général, et sur laquelle nous reviendrons encore dans celui des propriétés de l'hyperbole.

Reprenons la formule des racines y, dans laquelle nous ferons, pour abréger,

$$B^2 - 4AC = a, \quad 2(BD - 2AE) = b, \quad D^2 - 4AF = c.$$

on aura donc

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire,

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{x}{2A}\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on regarde la somme des deux termes $\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ comme un seul terme, on aura à faire la puissance $\frac{1}{2}$ du binome $a + \left(\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)$, laquelle sera (Alg., 1re sect.)

$$a^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)^2}{8a^{\frac{3}{2}}}+\text{etc.};$$

ensorte qu'on obtiendra cette formule des valeurs de y, développée suivant les puissances décroissantes de x,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left[a^{\frac{1}{2}}x+\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}+\left(\frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{x}+\text{etc.}\right].$$

Il est maintenant facile d'assigner le système de droites dans lesquelles la courbe tend à se changer, lorsque l'abscisse augmente, ou dont la formule des ordonnées, soit la *limite* de celle des ordonnées de la courbe. A cet effet, on observera que, pour des valeurs toujours croissantes de x, la portion du développement précédent, à partir du terme multiplié par $\frac{1}{x}$ inclusivement, diminue et peut devenir moindre que toute quantité donnée, en prenant x convenablement : il résulte d'ailleurs de la notion de limite, que la somme des termes constans $-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\cdot\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$, doit faire partie de l'expression de la limite, puisqu'autrement l'expression et sa limite différeraient d'une quantité finie. Ainsi lorsque l'abscisse x est parvenue au terme de ses accroissemens, l'ordonnée correspondante est réduite à

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left[a^{\frac{1}{2}}x+\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}\right].$$

$$=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left[x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right] \quad (1)$$

formule qui représente le système de deux droites qu'on nomme *asymptotes* de la courbe. On peut donc regarder l'asymptote comme le prolongement de l'élément extrême de l'hyperbole, dont chaque branche serait considérée comme un polygone formé d'une infinité de côtés infiniment petits.

Pour avoir les intersections de ces asymptotes avec le diamètre que nous appelons toujours FH, il faut poser

$$x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}=0,$$

d'où

$$x=-\frac{BD-2AE}{B^2-4AC},$$

ce qui est l'abscisse du centre (31) : ainsi les asymptotes se coupent au centre de la courbe, et on observera qu'elles sont placées symétriquement par rapport au diamètre que nous considérons, puisque, rapportées à cette droite, elles ont pour ordonnées

$$\pm\frac{1}{2A}\left[x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right].$$

42. L'hyperbole est donc la seule des trois courbes du premier ordre, qui comporte des asymptotes, puisque la formule (1) devient infinie pour la parabole et imaginaire pour l'ellipse.

43. Supposons que la proposée manque des termes de x^2 et de x, ce qui arrive par $C=0$, $E=0$, hypothèses sous lesquelles le caractère hyperbolique a lieu : alors la formule (1) donne celles-ci,

$$y=0, \quad y=-\frac{B}{A}x-\frac{D}{A}\ldots\ldots(2),$$

dont la première dit qu'une des asymptotes est l'axe même des x.

Lorsque le seul terme de x^2 manque, ou lorsqu'on a $C=0$, la même formule donne

$$y=-\frac{E}{B}, \quad y=-\frac{B}{A}x+\frac{AE-BD}{AB}\ldots\ldots(3),$$

équations dont la première avertit qu'une des asymptotes est parallèle à l'axe des x.

44. L'équation des asymptotes se refuse à l'hypothèse $A=0$;

mais alors on part de l'équation générale résolue par rapport à x, laquelle en posant $B^2-4AC=a$, $2(BE-2CD)=b'$, $E^2-4CF=c'$, donne, après le développement de la puissance $\frac{1}{2}$ du trinome sous le radical,

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left[a^{\frac{1}{2}}y+\frac{b'}{2a^{\frac{1}{2}}}+\left(\frac{c'}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{b'^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{y}+\text{etc.}\right],$$

formule qui a pour limite

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left[y\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BE-2CD}{\sqrt{B^2-4AC}}\right]\ldots(4).$$

Cependant il ne faut pas croire que les formules (1) et (4) donnent deux systèmes différens d'asymptotes. En effet, l'hypothèse

$$y\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BE-2CD}{\sqrt{B^2-4AC}}=0,$$

faite dans (4), donne

$$y=-\frac{BE-2CD}{B^2-4AC},$$

c'est-à-dire, l'ordonnée du centre : donc les droites de la formule (1), et celles de la formule (4) se coupent au centre. Si de cette dernière formule on dégage y, on obtient pour le signe supérieur du radical,

$$y=\frac{2Cx}{-B+\sqrt{B^2-4AC}}+\text{etc.}$$

et pour le signe inférieur,

$$y=\frac{2Cx}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}+\text{etc.};$$

la première de ces valeurs se réduit à

$$y=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x+\text{etc.},$$

et la seconde à

$$y=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x+\text{etc.}$$

Donc ces deux asymptotes font avec l'axe des abscisses, les mêmes angles que celles de l'équation (1), puisque les coefficiens de x ne diffèrent pas.

45. Qu'on suppose maintenant $A=0$, $D=0$ dans la formule (4), et on aura

$$x=0, \quad y=-\frac{C}{B}x-\frac{E}{B}\ldots.(5):$$

l'une des asymptotes est donc l'axe des y. Soit seulement $A=0$, et les asymptotes seront représentées par

$$x=-\frac{D}{B}, \quad y=-\frac{Cx}{B}-\frac{BE-CD}{B^2}\ldots..(6).$$

46. Donc, 1°. *si les carrés* x^2 *et* y^2 *viennent à manquer, des deux asymptotes, l'une est parallèle à l'axe des* x, *l'autre à l'axe des* y.

2°. *Si les carrés et les premières puissances des variables manquent en même temps, les axes eux-mêmes deviennent asymptotes.*

47. Pour $B=0$, $A=-C$, hypothèses qui rendent l'hyperbole équilatère (40), l'équation aux asymptotes devient

$$y=\pm x-\frac{D\pm E}{2A};$$

et comme les tangentes des angles faits par ces droites avec l'axe des x, satisfont à la relation $aa'+1=0$, on conclut que, pour cette particularité de l'hyperbole, les asymptotes sont à angles droits; ce qui arrive encore pour $A=-C$, comme on peut s'en assurer en faisant le produit

$$\left(\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\left(\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)$$

qui devient alors $=-1$: ensorte que la relation $aa'+1=0$ (chap. II, probl. IV) est satisfaite.

48. Les deux formules (1) et (4) sont en défaut, lors-

qu'on a en même temps $A=0$, $C=0$: il faut donc alors trouver les asymptotes par une autre voie. L'équation générale se réduit, sous cette double hypothèse, à

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0:$$

cette équation résolue par rapport à x, donne

$$x = -\frac{Dy+F}{By+E},$$

et on en conclut $x=\infty$ pour

$$By + E = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{E}{B},$$

équation de l'une des asymptotes, qui est parallèle à l'axe des x; en faisant la division de $Dy+F$ par $By+E$, on trouve

$$x = -\frac{D}{B} + \frac{FB-DE}{B(By+E)};$$

or y augmentant continuellement jusqu'à la limite ∞, x décroît continuellement jusqu'à la limite,

$$x = -\frac{D}{B},$$

équation de l'autre asymptote parallèle à l'axe des y. Pour trouver cette seconde asymptote, on aurait pu résoudre l'équation parrapport à y, et on aurait eu

$$y = -\frac{Ex+F}{Bx+D};$$

l'hypothèse $Bx+D=0$, qui répond à $y=\infty$, donne en effet

$$x = -\frac{D}{B}.$$

Ce procédé est encore applicable, lorsque l'équation ne renferme que l'une des variables à la première puissance. Qu'on suppose, en effet, $C=0$, et qu'on résolve par rapport à

x l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Dy + Ex + F = 0,$$

on aura

$$x = -\frac{Ay^2 + Dy + F}{By + E},$$

valeur de x qui devient infinie pour

$$By + E = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{E}{B},$$

asymptote donnée par la première des équations (3) trouvée (43) : on obtient l'autre en faisant la division, et on trouve

$$x = -\frac{A}{B}y - \frac{BD - AE}{B^2} - \frac{AE^2 + FB^2 - BDE}{B^2(By + E)}.$$

Pour $y = \infty$, la valeur de x devient

$$x = -\frac{A}{B}y - \frac{BD - AE}{B^2},$$

d'où

$$y = -\frac{B}{A}x + \frac{AE - BD}{AB},$$

équation de l'autre asymptote (43).

On procéderait de la même manière pour trouver les asymptotes sous l'hypothèse $A = 0$ qui met en défaut la formule (1).

49. Si l'on a $C = 0$, $E = 0$, l'équation générale devient

$$Ay^2 + Bxy + Dy + F = 0,$$

et elle donne

$$x = -\frac{Ay^2 + Dy + F}{By} = -\frac{A}{B}y - \frac{D}{B} - \frac{F}{By}:$$

or pour des valeurs de y tant positives que négatives, et décroissantes indéfiniment, x augmente continuellement ; et enfin pour la limite 0 des décroissemens de y, x atteint la

limite ∞; d'où l'on conclut que les deux branches de la courbe vont se rapprochant sans cesse de l'axe des abscisses qu'elles ne peuvent atteindre, et qui est une asymptote donnée par $y=0$. Maintenant si l'on suppose que y augmente jusqu'à l'infini, le terme $\frac{F}{By}$ diminue jusqu'à zéro, et conséquemment la valeur de x augmente jusqu'à la limite

$$x=-\frac{A}{B}y-\frac{D}{B};\quad \text{d'où}\quad y=-\frac{B}{A}x-\frac{D}{A},$$

droite qui est l'autre asymptote.

Le cas de $A=0$, $E=0$ ne laisse maintenant aucune difficulté.

50. On a déjà vu (38) que, dans l'hypothèse de l'égalité des racines x' et x'', donnée par la relation (31), savoir :

$$\frac{(BD-2AE)^2}{(B^2-4AC)^2}=\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC},$$

l'équation de l'hyperbole représente deux droites qui se coupent au centre : en remplaçant $\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}$ par sa valeur dans la formule générale des racines y, on obtient celle-ci,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\left[(B^2-4AC)\left(x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}\right)\right]};$$

c'est-à-dire,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left[x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right].$$

Ces droites seraient donc les asymptotes de l'hyperbole, si cette courbe existait, ou plutôt l'hyperbole se transforme en quelque sorte dans ses asymptotes.

Passons maintenant aux applications.

Exemple I. Construire la courbe de l'équation

$$y^2 - x^2 + my - nx = 0,$$

dans laquelle nous supposerons d'abord $m > n$; en la résolvant par rapport à y, on trouve

$$y = \frac{-m \pm \sqrt{4x^2 + 4nx + m^2}}{2};$$

et comme pour des abscisses tant positives que négatives, les ordonnées y sont réelles, et restent indéfiniment telles, on reconnaît que l'équation peut représenter une hyperbole. L'équation de son diamètre FH (fig. 57) est

$$y = -\frac{m}{2} = \text{AC}'.$$

Ce diamètre est donc parallèle à l'axe AX : les abscisses des intersections de la courbe avec ce diamètre, sont fournies par

$$4x^2 + 4nx + m^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - m^2}}{2};$$

et comme elles sont imaginaires sous l'hypothèse $m > n$, on en conclut que la courbe ne rencontre pas ce diamètre. Résolvant l'équation par rapport à x, on obtient

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{4y^2 + 4my + n^2}}{2};$$

le second diamètre F'H' a donc pour équation

$$x = -\frac{n}{2} = \text{AC}'':$$

il est parallèle à l'axe AY, et il coupe FH au centre C de la courbe : les racines du trinome sous le radical égalé à zéro, sont

$$y = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2};$$

prenant donc $AC' = -\frac{m}{2}$, augmentant et diminuant cette longueur de $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{2}$, ce qui donne les abcisses Ab, Ab'; puis menant les parallèles ba, $b'a'$, on aura les intersections a, a' de la courbe avec F'H'. Pour avoir les points de rencontre de la courbe, 1°. avec l'axe AX, on fera $y=0$, d'où resultent $x=0$, $x=-n=AA'$; 2°. avec l'axe AY, on posera $x=0$, valeur à laquelle répondent $y=0$, $y=-m=AD$.

Passons à la détermination des asymptotes. On mettra la formule des racines y sous la forme

$$\begin{aligned} y &= -\frac{m}{2} \pm \frac{x}{2}\left[4+\left(\frac{4n}{x}+\frac{m^2}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{m}{2} \pm \frac{x}{2}\left[2+\frac{1}{4}\left(\frac{4n}{x}+\frac{m^2}{x^2}\right)+\text{etc.}\right]; \end{aligned}$$

après la multiplication par x et l'hypothèse $x=\infty$, on trouve

$$y = -\frac{m}{2} \pm \tfrac{1}{2}(2x+n),$$

qui indique deux lignes symétriques par rapport au diamètre FH, qu'elles coupent au point $x=-\frac{n}{2}$, c'est-à-dire, au centre C. Si l'on veut avoir les intersections de ces droites, 1°. avec l'axe des y, il faut faire $x=0$, ce qui donne

$$y = \frac{-m \pm n}{2};$$

2°. avec celui des x, on écrira $y=0$, d'où

$$x = \frac{-n \pm m}{2},$$

valeurs qui servent à construire et à vérifier la position des asymptotes.

L'hyperbole en question est équilatère, et ses asymptotes sont à angles droits.

Lorsque $m=n$, la formule des racines y devient

$$y=\frac{-m\pm(2x+n)}{2},$$

et elle représente deux droites qui répètent les asymptotes trouvées dans le cas précédent (50).

Enfin pour $m<n$, la courbe rencontre le diamètre FH, et ses intersections avec F'H' sont imaginaires.

Exemple II. Construire la courbe de l'équation

$$y^2+3xy+x^2+y+x=0:$$

on en déduit

$$y=-\frac{3x+1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[5x^2+2x+1]},$$

$$x=-\frac{3y+1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[5y^2+2y+1]};$$

et comme les racines du trinome $5x^2+2x+1$ sont imaginaires, il en est de même de celles de l'autre trinome $5y^2+2y+1$; ensorte que la courbe ne rencontre ni l'un ni l'autre de ses deux diamètres (fig. 58); ce qui doit être, parce qu'ici les coefficiens A et C ont même signe (38). Il faut donc rechercher si la courbe n'aurait pas d'intersections avec ses axes : on fera, 1°. $x=0$, d'où

$$y=0,\quad y=-1=\text{AR}'.$$

2°. $y=0$, d'où

$$x=0,\quad x=-1=\text{AR}.$$

Pour connaître la situation des branches pour chacune desquelles nous n'avons pu obtenir qu'un seul point, on aura recours à l'équation aux asymptotes, qui est

$$y=-\frac{3x+1}{2}\pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

d'où l'on conclut l'abscisse du centre $x=-\frac{1}{5}$, et la po-

sition de chacune des asymptotes qui définit celle de chacune des branches, lorsque d'ailleurs on connaît un point.

On s'exercera particulièrement sur les équations

$$xy+x+y+1=0, \quad xy+x+1=0,$$
$$xy+x+y+1=0, \quad xy+1=0, \quad xy=0.$$

51. On trouve dans le second chapitre de la seconde partie de *la Théorie des Fonctions*, par l'illustre *Lagrange*, une idée de l'asymptote la plus simple et la plus générale qu'on en puisse donner ; mais comme l'analyse à laquelle elle donne lieu, s'étend aux courbes algébriques et transcendantes, généralement représentées par $y=fx$, nous la particulariserons et nous la restreindrons enfin aux lignes du second degré.

Supposons qu'après la substitution de $\frac{1}{i}$, au lieu de x dans $y=fx$, cette fonction qui devient $f\left(\frac{1}{i}\right)$ se développe comme il suit,

$$y=f\left(\frac{1}{i}\right)=\text{etc.}+\frac{D'}{i^3}+\frac{C'}{i^2}+\frac{B'}{i}+A+Bi+Ci^2+\text{etc.}:$$

il y aura lieu à plusieurs distinctions : 1°. sous cette forme générale, la courbe *du contact le plus intime* avec la proposée, ou dont le cours se rapprochera le plus de celui de la proposée, pour $i=0$, c'est-à-dire pour l'abscisse $x=\infty$, sera la courbe représentée par

$$y=\text{etc.}+\frac{D'}{i^3}+\frac{C'}{i^2}+\frac{B'}{i}+A,$$

ou par

$$y=A+B'x+C'x^2+D'x^3+\text{etc.},$$

en remplaçant $\frac{1}{i}$ par x : il faut entendre par là que toute autre courbe qui ne sera pas d'un degré plus élevé que cette dernière, ou qui ne renfermera pas plus de constantes, ne pourra passer entr'elle et la proposée. La courbe de cette dernière équation est dite *asymptote* de la courbe donnée.

2°. Si

$$y=f\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{B'}{i}+A+Bi+Ci^2+\text{etc.},$$

celle du contact le plus intime, ou du plus grand rapprochement possible, pour $i=0$ qui répond à $x=\infty$, aura pour équation

$$y=\frac{B'}{i}+A=A+Bx;$$

l'*asymptote* sera donc une ligne droite.

3°. Si le développement de la proposée ne renferme pas de puissances positives de i, ensorte qu'il soit simplement

$$y=f\left(\frac{1}{i}\right)=\text{etc.}+\frac{C'}{i^2}+\frac{B'}{i}+A,$$

la courbe asymptote sera

$$y=A+B'x+C'x^2+\text{etc.}$$

4°. Enfin soit

$$y=f\left(\frac{1}{i}\right)=A+Bi+Ci^2+\text{etc.},$$

l'asymptote sera donnée par

$$y=A,$$

équation d'une droite parallèle à l'axe des x, et qui sera celle de cet axe pour $A=0$.

En conservant les désignations employées (41), et changeant x en $\frac{1}{i}$, la formule

$$y=-\frac{B}{2A}\cdot\frac{1}{i}-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\cdot\frac{1}{i}\left[a+bi+ci^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

developpée, donnera

$$y=\left(-\frac{B}{2A}\pm\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2A}\right)\frac{1}{i}+\left(-\frac{D}{2A}\pm\frac{b}{4a^{\frac{1}{2}}A}\right)$$

$$\pm\frac{1}{2A}\left[\frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right]i\pm(\quad\quad)i^2+\text{etc.}$$

Or l'équation de la ligne droite

$$y=mx+n$$

devient, pour $x=\frac{1}{i}$,

$$y=m\frac{1}{i}+n$$

et si l'on détermine les quantités arbitraires m et n d'après les conditions

$$m=-\frac{B\pm a^{\frac{1}{2}}}{2A},\qquad n=-\frac{D}{2A}\pm\frac{b}{4a^{\frac{1}{2}}A},$$

on aura par ces substitutions dans $y=mx+n$, l'équation de la droite asymptote de la courbe. En effet, il est facile de s'assurer que toute autre droite dont on n'aurait déterminé que l'une des constantes, d'après l'une des conditions ci-dessus, ne pourrait passer entre la droite précédente et la courbe : on voit en même temps que pour $i=0$, c'est-à-dire, pour $x=\infty$, la droite et la courbe se confondent, et qu'en allant de $x=0$ à $x=\infty$, la droite se rapproche de plus en plus de la courbe.

CHAPITRE VI.

Étant donnée d'espèce et de position une ligne quelconque du second degré, placée comme on voudra par rapport aux axes rectangulaires des coordonnées, établir l'équation numérique de cette ligne.

52. LA solution de cette question, l'inverse de celle qui fait le sujet du chapitre quatrième, est due à M. *Raymond*, professeur de mathématiques au collége de Chambéri, qui l'a consignée dans le n° 6 du tome Ier des *Annales de Mathématiques*.

1°. Soit l'ellipse $ala'l'$ (fig. 59), disposée de telle manière par rapport à ses axes AY, AX', que l'on ait

$$AF=-\tfrac{3}{2},\quad AR=-2,\quad AB=x'=-4,$$
$$AB'=x''=-8,\quad C'l=C'l'=2,$$

en observant que la courbe est tout entière dans la région des abscisses négatives. On mettra la formule des valeurs de y sous la forme

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\sqrt{\left[\frac{B^2-4AC}{4A^2}(x-x')(x-x'')\right]}\ldots(1):$$

le diamètre FH étant assujéti à passer par les points F et R dont les coordonnées sont 0 et $-\frac{3}{2}$, -2 et 0, a pour équation

$$y=-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{2}:$$

ainsi la formule générale devient

$$y=-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{B^2-4AC}{4A^2}(x+4)(x+8)\right]};$$

mettant sous le radical la valeur de x, qui répond au centre C de la courbe, et faisant à cet effet,

$$x = AC = AB + \frac{AB' - AB}{2} = -4 - 2 = -6,$$

la partie radicale de l'ordonnée, sera la valeur de Cl ou de Cl', qui est 2, et on aura

$$\sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2} \times -4} = 2, \quad \text{d'où} \quad \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} = -1.$$

Ainsi la formule qui donne y devient

$$y = -\tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{-(x^2 + 12x + 32)},$$

d'où l'on déduit l'équation

$$16y^2 + 24xy + 25x^2 + 48y + 228x + 548 = 0,$$

dont on constatera l'exactitude par la discussion.

2°. Soit C' un point considéré comme le résultat de la discussion d'une ellipse réduite à ce point; et soient (fig. 60)

$$AF = 2, \quad AR = -2, \quad AC = 5;$$

on sait qu'on a aussi, dans le cas actuel, $x' = x'' = 5$: l'équation du diamètre FH sera

$$y = x + 2;$$

donc la formule des valeurs de y, deviendra, après les substitutions,

$$y = x + 2 \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}(x-5)^2};$$

or pour $x = 5$, qui répond à C', la corde de la courbe, parallèle à l'axe des y, est nulle, et il en est de même de sa moitié qui est la valeur du radical; on a donc

$$\sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2} \times 0} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} = \frac{0}{0};$$

ce rapport $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ étant indéterminé, on peut le supposer $=-1$, en observant que, dans l'ellipse, B^2-4AC est négatif; on aura donc

$$y = x + 2 \pm (x-5)\sqrt{-1};$$

d'où l'on déduit l'équation

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 4y - 6x + 29 = 0.$$

Il est facile de rendre raison de l'indétermination du rapport $\frac{B^2-4AC}{4A^2} = -M$: en effet, de l'équation

$$y = x + 2 \pm \sqrt{-M(x-5)^2},$$

on tire celle-ci

$$(y-x-2)^2 + M(x-5)^2 = 0,$$

qui ne peut être satisfaite qu'en posant séparément

$$y-x-2=0, \qquad M(x-5)^2=0;$$

ou plus simplement

$$y-x-2=0, \qquad x-5=0;$$

puisque M n'est pas nul; de plus, comme l'on a

$$M = -\frac{(y-x-2)^2}{(x-5)^2},$$

nécessairement $M = \frac{0}{0}$.

3°. Soit une hyperbole (fig. 61) pour laquelle on ait

$$AF = -1, \quad AR = 3, \quad AB = x' = 5,$$
$$AB' = x'' = -1, \quad C'b = C'b' = 3:$$

nous observerons que la courbe n'ayant aucun point entre les limites Ba, $B'a'$, les valeurs du radical, correspondantes à $x = AC$ qui est l'abcisse du centre, sont imaginaires, et qu'ainsi $C'b$ et $C'b'$ ne sont ici que les coefficiens de $\sqrt{-1}$

dans les valeurs de ces ordonnées imaginaires et égales, comptées du centre C'. La formule qui donne y, devient

$$y = \tfrac{1}{3}x - 1 \pm \sqrt{\left[\frac{B^2-4AC}{4A^2}(x-5)(x+1)\right]};$$

mettant sous le radical pour x l'abscisse

$$AC = \frac{AB' + AB}{2} - AB' = 2,$$

et égalant le radical à $3\sqrt{-1}$, on aura

$$\sqrt{\left[\frac{B^2-4AC}{4A^2} \times -9\right]} = 3\sqrt{-1},$$

d'où

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2} = 1, \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{3}x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 4x - 5};$$

d'où résulte l'équation

$$9y^2 - 6xy - 8x^2 + 18y + 30x + 54 = 0.$$

4°. Soient, pour une hyperbole (fig. 62),

$$AC' = -2, \quad AB = AB' = 2, \quad C'r = C'r' = 3,$$

C' étant le centre de la courbe : comme le diamètre FH ne rencontre pas la courbe, les abscisses des intersections de la courbe avec ce diamètre, sont imaginaires, et $AB = AB' = 2$, ne représente que le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans les valeurs de x' et x'' qui sont

$$x' = AB\sqrt{-1}, \quad x'' = -AB'\sqrt{-1}.$$

On a donc d'abord

$$y = -x - 2 \pm \sqrt{\left[\frac{B^2-4AC}{4A^2}(x-x')(x-x'')\right]},$$

puis, à cause de $x' = 2\sqrt{-1}$, $x'' = -2\sqrt{-1}$,

$$y = -x - 2 \pm \sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}(x^2+4)}.$$

Faisant maintenant sous le radical $x=0$, attendu que l'abscisse relative au centre C', est nulle, on aura

$$\sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}}\times 4=3,\quad \text{d'où}\quad \frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{9}{4};$$

ainsi l'équation sera

$$4y^2+8xy-5x^2+16y+16x-20=0.$$

5°. Soit une hyperbole (fig. 63) rapportée aux asymptotes SS', ss' dont la dernière soit parallèle à l'axe AY, ce qui a lieu parce que l'équation manque du terme en y^2 (45) : on a

$$As'=AS=3,\quad AR=AR'=2,\quad Ar=6,\quad Ar'=\tfrac{8}{3}.$$

L'asymptote CS, assujétie à passer par les points $x'=3$, $y'=0$, $x''=0$, $y''=6$, aura pour équation

$$y=-2x+6,\quad \text{ou}\quad y+2x-6=0,$$

et l'équation de l'asymptote Cs sera

$$x=-3,\quad \text{ou}\quad x+3=0:$$

le produit de ces deux équations, savoir

$$xy+2x^2+3y-18=0,$$

représentera le système des asymptotes, et ce produit ne diffère de l'équation de la courbe, que par le terme tout connu (*) :

(*) En effet, lorsque le terme en y^2 manque dans l'équation générale, les asymptotes sont (45),

$$x=-\frac{D}{B},\qquad y=-\frac{Cx}{B}-\frac{BE-CD}{B^2},$$

dont le produit est

$$Bxy+Cx^2+Dy+Ex+\frac{D(BE-CD)}{B^2}=0\ldots(1),$$

et l'hyperbole a pour équation

$$Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ldots\ldots(2);$$

les premiers membres ne différant que par le terme tout connu, si on

tenons maintenant compte des données que fournit la situation de la courbe, à l'effet de corriger le terme tout connu: pour $x = 0$, on a

$$y = Ar' = \tfrac{8}{3}, \quad \text{d'où} \quad 3y - 8 = 0;$$

pour $y = 0$, on a

$$x = AR = AR' = \pm 2,$$

d'où

$$x^2 = 4 \quad \text{et} \quad 2x^2 - 8 = 0:$$

de ces deux hypothèses on conclut que le terme indépendant des variables, dans l'équation de l'hyperbole, doit être -8, et qu'ainsi cette équation est

$$xy + 2x^2 + 3y - 8 = 0:$$

on en tire

$$y = \frac{-2x^2 + 8}{x + 3} = -2x + 6 - \frac{10}{x + 3},$$

résultat qui, pour $x = \infty$, se réduit à

$$y = -2x + 6,$$

qui est en effet l'une des asymptotes: pour $x = -3$, on a $y = \infty$; ainsi $x + 3 = 0$ représente l'autre asymptote.

6°. Prenons une hyperbole (fig. 64) dont l'une des asymptotes CS soit parallèle à l'axe AX, et alors l'équation manque du terme en x^2 (47): soient

$$AR = AR' = Ar = \tfrac{2}{3}, \quad Ar' = 3:$$

l'asymptote CS aura pour équation

$$y = \tfrac{2}{3}, \quad \text{d'où} \quad y - \tfrac{2}{3} = 0;$$

---

donnait, par exemple, l'ordonnée de la courbe pour $x = 0$, on aurait alors

$$Dy + F = 0,$$

et on remplacerait dans le produit (1) le terme $\frac{D(BE - CD)}{B^2}$ par F.

et l'équation de l'asymptote Cs, sera

$$y = -x - \tfrac{2}{3}, \quad \text{d'où} \quad x + y + \tfrac{2}{3} = 0:$$

multipliant ces équations entr'elles, on obtient

$$3xy + 3y^2 - 2x - \tfrac{4}{3} = 0;$$

mais à cause de $Ar' = 3$, l'hypothèse $y = 0$ donnera

$$x = 3, \quad \text{d'où} \quad -2x + 6 = 0:$$

l'équation cherchée sera donc

$$3xy + 3y^2 - 2x + 6 = 0.$$

7°. Soit une parabole (fig. 65), pour laquelle on ait ces données :

$$AP = 3, \quad PN' = 3 + 2\sqrt{2}, \quad PN = 3 - 2\sqrt{2},$$

d'où,

$$Pp = 3, \quad pN' = pN = 2\sqrt{2}, \quad AB = x' = 2, \quad Ba = 2,$$

Ba étant la limite de la courbe parallèle à l'axe des y ; de ce que le diamètre passe par les points p et a, pour lesquels on a

$$AP = Pp, \quad AB = Ba,$$

il s'ensuit que son équation sera

$$y = x;$$

ensorte que la formule des racines y (36) devient

$$y = x \pm \sqrt{\frac{2(BD - 2AE)}{4A^2}(x - 2)};$$

mais pour $x = AP = 3$, on a

$$\sqrt{\frac{2(BD - 2AE)}{4A^2} \times 1} = pN' = 2\sqrt{2};$$

donc

$$\frac{2(BD - 2AE)}{4A^2} = 8.$$

Ainsi l'équation cherchée sera

$$y = x \pm \sqrt{8(x-2)},$$

d'où

$$y^2 - 2xy + x^2 - 8x + 16 = 0.$$

On peut supposer ces données $AB = 2$, $Ba = x' = 2$, $AT = 4$, pour $y = 0$: si l'on sait de plus que l'équation du diamètre, est $y = x$, la formule y sera

$$y = x \pm \sqrt{\frac{2(BD - 2AE)}{4A^2}(x-2)};$$

mais pour $x = 4$, l'ordonnée $y = 0$, donc

$$0 = 4 \pm \sqrt{\frac{2(BD - 2AE)}{4A^2}(4-2)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{2(BD - 2AE)}{4A^2} = 8,$$

ce qui ramène à l'équation précédente.

Le principe sur lequel reposent ces solutions, sera présenté dans l'un des chapitres suivans, lorsqu'il sera question du nombre des points nécessaires pour fixer la position d'une ligne du second degré.

CHAPITRE VII.

Réduction de l'équation générale à l'une ou à l'autre de ces deux formes

$$My^2 + Nx^2 + P = 0, \qquad My^2 + Nx^2 + Qx = 0.$$

53. NOUS généraliserons la définition du centre, donnée (31) : le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole, les deux seules lignes du second degré qui en admettent, est le point dans lequel toutes les cordes sont divisées également : il faut entendre par corde, dans l'hyperbole, la droite qui aboutit aux deux branches, en passant par le centre, droite qui, comme on le verra, ne rencontre l'hyperbole qu'en deux points. Il résulte de cette définition du centre, que toute équation du second degré entre deux variables, où ne se trouvent pas les termes de première puissance en y et x, ou qui est de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0,$$

suppose l'origine de la courbe au centre; car à $x = 0$ répondent deux valeurs de y, égales et de signes contraires, et à $y = 0$ répondent deux pareilles valeurs de x.

Les deux réduites de l'énoncé sont remarquables; car la première, pour $x = 0$, donne $y = \pm\sqrt{-\frac{P}{M}}$, et pour $y = 0$, elle donne $x = \pm\sqrt{-\frac{P}{N}}$; ainsi d'abord les deux axes sont divisés également à l'origine : de plus, à deux valeurs de x, égales et de différens signes, répondent quatre ordonnées égales dont deux sont positives et deux négatives; et la même

conclusion a lieu à l'égard des quatre ordonnées x qui répondent à deux abscisses y égales et de différens signes. Ensorte que la courbe est divisée par chaque axe, en deux parties symétriques, c'est-à-dire, superposables. Ces axes se nomment *axes principaux*, et les points dans lesquels ils rencontrent la courbe, sont dits *sommets*. De la seconde transformée on déduit $y = \pm o$ pour $x = o$, et pour toute valeur de x, on obtient deux ordonnées égales et de différens signes : l'axe des y n'a donc qu'un point commun avec la courbe, lequel est l'origine des coordonnées; il touche la courbe en ce point qu'on nomme *sommet;* et l'axe des x, qu'on nomme *axe principal*, la divise en deux parties symétriques.

54. Nous démontrerons d'abord la possibilité de ces réductions qui n'altèrent en rien la généralité de l'équation, et nous les effectuerons ensuite.

Reprenons l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

Si l'on coupe cette courbe par une droite RL (fig. 66), ayant pour équation

$$y = ax + b, \qquad \text{d'où} \qquad x = a'y + b' \ldots\ldots (1),$$

on aura pour déterminer les ordonnées y des intersections i, i', l'équation

$$\begin{aligned}(A + Ca'^2 + Ba')\, y^2 + [(2Ca' + B)\, b' + Ea' + D]\, y \\ + Cb'^2 + Eb' + F = o:\end{aligned}$$

la demi-somme des ordonnées de ces deux points, est l'ordonnée du milieu m de la corde ii' : la valeur de l'ordonnée de ce point, sera donc

$$Y = -\frac{(2Ca' + B)\, b' + Ea' + D}{2\,(Ca'^2 + A + Ba')} \ldots (2);$$

l'abscisse du même point est

$$X = a'Y + b' \ldots\ldots (3);$$

éliminant entre ces deux équations, b' qui particularise la position de chaque corde, on trouvera l'équation du lieu général de tous les milieux des cordes parallèles à ii', ou de la droite qui divise également toutes ces cordes, puisque par cette élimination de b', on considère le système des cordes qui diffèrent par b', sans différer par a' : le résultat est

$$(2Ca'+B)X+(2A+Ba')Y+Ea'+D=0\ldots(4).$$

Il est visible que si par un changement de coordonnées, on rapporte la courbe à deux axes dont l'un, celui des y, soit parallèle aux cordes ii', ff', etc., parallèles entre elles, et l'autre, celui des x, soit la droite de l'équation précédente, l'équation générale de la courbe prendra nécessairement la forme

$$my^2+nx^2+px+q=0,$$

puisque cette équation doit donner, pour chaque abscisse x, deux valeurs de y, égales et de signes contraires. Si maintenant on pose (chap. III)

$$x=\alpha+x',$$

ce qui revient à transporter l'axe des y parallèlement à lui-même, on aura la transformée

$$my^2+nx'^2+(2n\alpha+p)x'+n\alpha^2+p\alpha+q=0;$$

et en prenant $\alpha=-\frac{p}{2n}$, ce qui est possible, si le coefficient n n'est pas nul, on aura l'équation simplifiée

$$My^2+Nx^2+P=0\ldots(5),$$

en changeant x' en x. Lorsque n sera zéro, on pourra disposer de α de manière à rendre nul le terme $n\alpha^2+p\alpha+q$, ensorte que la réduite sera

$$My^2+Qx=0\ldots(6).$$

L'équation (5) comprend l'ellipse et l'hyperbole qui admettent

un centre, et l'équation (6) est relative à la parabole qui n'en a pas (36).

On trouve (chap. II, probl. XII)

$$\frac{Ba'^2 + 2(A - C)a' - B}{\sqrt{1+a'^2}\sqrt{[(2Ca' + B)^2 + (2A + Ba')^2}},$$

pour le cosinus de l'angle entre les droites des équations (1) et (4), lequel angle est celui des nouveaux axes. Pour que cet angle soit droit, il faut qu'on ait

$$Ba'^2 + 2(A - C)a' - B = 0 \ldots (7),$$

équation de laquelle on tire deux valeurs réelles de a' qui fixent la position des axes rectangulaires.

Il importe d'indiquer au moins l'application de ce qui précède à la recherche des transformées à trois termes.

A cet effet, étant donnée une équation numérique du second degré entre deux variables, on portera dans (7) pour A, B et C leurs valeurs numériques, on tirera de cette équation les deux valeurs de a', auxquelles répondent deux valeurs de $a = \frac{1}{a'}$, lesquelles reportées pour a dans

$$y = ax + b,$$

donnent les équations de deux droites parallèles aux axes principaux de la courbe : d'ailleurs comme on sait déduire de la proposée, les coordonnées du centre de la courbe, on peut assujétir les deux droites de l'équation précédente à passer par le centre, et alors elles deviennent les axes principaux de la courbe ; mais de $a = \operatorname{tang} \alpha$, on conclut (Trigon.) les valeurs de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ d'après ces formules

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}, \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}:$$

reportant ces valeurs ainsi que celles de a et b dans les formules (chap. III, probl. IV), savoir,

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \qquad y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

et remplaçant dans la proposée x et y par ces trinomes, les termes en xy, y et x disparaissent, et le résultat est de la forme

$$My^2 + Nx^2 + P = 0.$$

Exemple Ier. La proposée étant

$$y^2 + xy + x^2 + y + x - 1 = 0,$$

l'équation (7) donne

$$a' = \pm 1, \quad \text{d'où} \quad a \text{ ou tang } \alpha = \pm 1, \quad \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

d'ailleurs on trouve pour les coordonnées du centre,

$$y = -\tfrac{1}{3}, \qquad x = -\tfrac{1}{3};$$

donc

$$y = -\tfrac{1}{3} + \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \qquad x = -\tfrac{1}{3} + \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}:$$

portant ces valeurs de x et y dans la proposée, on parvient à la réduite

$$y'^2 + 3x'^2 - \tfrac{8}{3} = 0.$$

Exemple II. Nous exposerons, sur un exemple, la marche à suivre quant à la parabole.

Soit la parabole

$$y^2 + 2xy + x^2 + y - x - 1 = 0,$$

l'équation (7) donne toujours

$$a' = \pm 1, \quad \text{d'où} \quad a = \pm 1:$$

portant dans l'équation (4) la valeur $a' = 1$, on obtient

$$4X + 4Y = 0, \quad \text{d'où} \quad Y = -X;$$

la substitution de cette valeur de Y pour y dans la proposée, donne

$$x = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad Y = \tfrac{1}{2} = y,$$

coordonnées du sommet de la courbe. Pour en venir à la

réduite de la forme (6), on fera dans la proposée, les substitutions

$$y = \tfrac{1}{2} + \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \quad x = -\tfrac{1}{2} + \frac{x'-y'}{\sqrt{2}},$$

qui donneront

$$x'^2 + \frac{y'}{\sqrt{2}} = 0.$$

55. Nous allons maintenant montrer comment on parvient effectivement aux réduites de l'énoncé. Les formules (chap. III, probl. IV) par lesquelles on déplace l'origine en même temps qu'on passe d'un système à un autre système d'axes rectangulaires, renferment trois quantités a, b, α, dont on peut disposer de manière à faire disparaître trois termes, ce qui fournit autant d'équations d'après lesquelles on évalue les trois quantités ci-dessus regardées comme arbitraires, et qui fixent la position de la nouvelle origine et des nouveaux axes (26).

Reprenons l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots (8):$$

si on voulait en même temps déplacer l'origine et changer la direction des axes, en les maintenant rectangulaires, il faudrait employer ces substitutions

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha;$$

cependant on pourra d'abord ne faire que celles qui déplacent l'origine, savoir,

$$x = a + x', \quad y = b + y' \ldots\ldots (9)$$

puis passer à celles-ci,

$$x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha, \quad y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \ldots\ldots (10).$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(11) \ldots\ldots 2Ab + Ba + D = D', \quad 2Ca + Bb + E = E' \ldots\ldots (12),$$
$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = F' \ldots\ldots (13),$$

on trouvera pour première transformée

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + D'y' + E'x' + F' = 0 \ldots (14),$$

dans laquelle les trois premiers coefficiens A, B, C sont les mêmes que dans la proposée. Remplaçons maintenant y' et x' par leurs valeurs (10), et nous obtiendrons la seconde transformée

$$\begin{aligned}
&(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\, y''^2 \\
&+ [2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha]\, y''x'' \\
&+ (A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)\, x''^2 \\
&+ (D'\cos\alpha - E'\sin\alpha)\, y'' + (D'\sin\alpha + E'\cos\alpha)\, x'' + F' = 0 \ldots (15),
\end{aligned}$$

dans laquelle le terme F' qui répète la proposée en changeant y en b et x en a, est le même que dans la précédente.

Puisque le terme du rectangle, ainsi que ceux des premières puissances des variables, ne doivent pas faire partie de la réduite, on posera ces trois équations de condition

$$2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0 \ldots (16),$$

$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = 0 \ldots\ldots (17),$$

$$D'\sin\alpha + E'\cos\alpha = 0 \ldots\ldots (18).$$

Considérons la première : on sait que $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$: donc (16) devient

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{B}{A - C} \ldots\ldots (19),$$

tangente qui sera toujours réelle; ensorte que l'évanouissement du rectangle sera toujours possible. On peut trouver la tangente de l'angle simple α : à cet effet, on divisera l'équation (16) par $\cos^2\alpha$, ce qui donnera, après la division par B,

$$\operatorname{tang}^2\alpha - \frac{2(A - C)}{B}\operatorname{tang}\alpha - 1 = 0 \ldots (19').$$

De ces deux tangentes, l'une fixera la position de l'axe des x'',

et l'autre celle de l'axe des y'', axes qui sont à angles droits ; parce que le produit des deux tangentes est -1 : on observera que l'équation (19') répète l'équation (7).

Cherchons maintenant à traduire en A, B, C, etc., les coefficiens de y''^2 et x''^2 de la transformée (15) qui se réduit à

$$(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\,y''^2 + (A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)\,x''^2 + F' = 0 \ldots\ldots (20).$$

A cet effet, posant

$$M = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$N = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

ajoutant ces deux équations et retranchant la seconde de la première, on trouve

$$(21)\ldots M+N=A+C,\quad M-N=\sqrt{[A^2+B^2+C^2-2AC]}\ldots(22),$$

en observant (Trig.) que

$$\left.\begin{array}{c} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \\ = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}} = \dfrac{A-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2-2AC}}, \\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \\ = \dfrac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}} = -\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2-2AC}}, \end{array}\right\}\ldots\ldots(23),$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

des formules (21) et (22), on conclut

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{1}{2}[A+C+\sqrt{B^2+(A-C)^2}] \\ \quad = \frac{1}{2}[A+C+\sqrt{B^2-4AC+(A+C)^2}] \\ N = \frac{1}{2}[A+C-\sqrt{B^2+(A-C)^2}] \\ \quad = \frac{1}{2}[A+C-\sqrt{B^2-4AC+(A+C)^2}] \end{array}\right\}\ldots\ldots(24).$$

On connaît donc M et N, et il reste à évaluer a et b pour en faire la substitution dans F' : en multipliant l'équation (17) par

$\cos\alpha$, et l'équation (18) par $\sin\alpha$, puis ajoutant les produits, on trouve $D' = 0$, d'où l'on conclut en même temps,

$$E' \sin\alpha = 0, \quad E' \cos\alpha = 0,$$

et conséquemment $E' = 0$: on a donc ces deux équations,

$$D' = 2Ab + Ba + D = 0, \quad E' = 2Ca + Bb + E = 0;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

coordonnées connues du centre : désignant par P ce que devient F' après ces substitutions, on a la transformée

$$My''^2 + Nx''^2 + P = 0 \ldots\ldots (25).$$

Ainsi pour placer les nouveaux axes, on mènera par la nouvelle origine ou par le centre, une parallèle à l'axe primitif des abscisses, par le même point une droite faisant avec cette parallèle, un angle α, moitié de celui déterminé par (19), droite qui sera l'axe des x'', et par l'origine, un axe perpendiculaire à celui-ci, qui sera l'axe des y''.

56. On remarquera donc qu'on peut d'abord, dans la première transformée (14), poser $D' = 0$, $E' = 0$, ce qui la réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0,$$

équation qui suppose l'origine au centre (53), puis dans cette dernière, effectuer les substitutions des formules (10). C'est la marche que nous suivrons dans les applications.

D'après (22), la seconde des formules (23) donne

$$\sin 2\alpha = -\frac{B}{M - N} \ldots\ldots (26):$$

d'ailleurs, si l'on multiplie l'une par l'autre les formules (24), on aura

$$MN = -\tfrac{1}{4}(B^2 - 4AC) \ldots\ldots (27);$$

mais on a trouvé

$$M + N = A + C;$$

donc les deux quantités M et N sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - (A + C)z - \tfrac{1}{4}(B^2 - 4AC) = 0 \ldots\ldots (28).$$

De là nous tirerons bientôt un procédé rapide pour passer de l'équation générale à la réduite

$$My^2 + Nx^2 = P.$$

57. Pour la réduction au sommet, on posera dans (15),

$$2A \sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$
$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29),$$
$$F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0 \ldots\ldots (30):$$

la première de ces conditions, qui répète (16), conduit à la détermination (19) : l'équation (30) qui n'est que la proposée en changeant y en b et x en a, indique que la nouvelle origine est sur la courbe, puisque ses coordonnées satisfont à l'équation générale : pour en déterminer la position, on mettra l'équation (29) sous la forme

$$D'\sin 2\alpha - E'(1 - \cos 2\alpha) = 0,$$

laquelle, après avoir remplacé sin 2α et cos 2α par leurs valeurs (23), devient

$$BD' - E'\left[A - C - \sqrt{B^2 - 4AC + (A + C)^2}\right] \ldots\ldots (31),$$

que l'on combinera avec (30). Pour la parabole, l'équation (31) se réduit à

$$BD' + 2CE' = 0:$$

on observera que cette courbe est la seule pour laquelle on soit obligé de calculer la transformée

$$My'^2 + Nx'^2 + Qx' = 0 \ldots\ldots (32);$$

mais en vertu de la seconde équation (24) et de $B^2-4AC=0$, on a $N=0$, donc la réduite de la parabole est

$$My''^2+Qx''=0\ldots\ldots(33).$$

Quant aux deux autres courbes, il sera plus expéditif de rechercher les équations au centre et aux axes principaux, parce qu'il est facile de passer de celles-là aux équations au sommet, comme nous le verrons plus bas.

58. Cherchons maintenant à remplacer M, N et P dans l'équation (25), par les portions des deux axes comprises dans la courbe. De la relation (27) et du caractère de l'ellipse $B^2-4AC<0$, on conclut que, pour cette courbe, les coefficiens M et N sont de même signe : donc P doit être négatif, et conséquemment l'équation (25) devient, en supprimant les accens,

$$My^2+Nx^2=P\ldots\ldots(34).$$

Désignons par A' l'abscisse pour $y=0$, on aura $N=\frac{P}{A'^2}$; soit B' l'ordonnée y pour $x=0$, on aura $M=\frac{P}{B'^2}$: après la substitution de ces valeurs de M et N dans (34), et la multiplication par $A'^2B'^2$, on est conduit à

$$A'^2y^2+B'^2x^2=A'^2B'^2\ldots\ldots(35).$$

Les axes $2A'$, $2B'$ sont particulièrement dits : *axes principaux* de la courbe, et on réserve la dénomination de *sommets* aux intersections de l'ellipse par le plus grand des deux axes $2A'$ et $2B'$.

Pour $A'=B'$, l'équation de l'ellipse devient celle d'un cercle dont le rayon est A'.

Pour l'hyperbole, si l'on désigne encore par A' l'abscisse x pour $y=0$, et par B' l'ordonnée y pour $x=0$, et qu'on fasse ces substitutions dans (25), on aura

$$N=-\frac{P}{A'^2},\qquad M=-\frac{P}{B'^2},$$

et conséquemment,

$$MN = \frac{P^2}{A'^2B'^2};$$

mais d'après la relation (27), le produit MN devant être négatif pour l'hyperbole, il faut nécessairement que l'une des quantités A' ou B' soit imaginaire, c'est-à-dire, de la forme $A'\sqrt{-1}$ ou $B'\sqrt{-1}$, en observant que P ne peut être imaginaire ; on aura donc dans le second cas,

$$N = -\frac{P}{A'^2}, \qquad M = \frac{P}{B'^2},$$

et l'équation (25) deviendra

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2 \ldots (36).$$

Dans le premier cas, on aura

$$N = \frac{P}{A'^2}, \qquad M = -\frac{P}{B'^2},$$

et par ces substitutions dans (25), on trouve cette réduite,

$$-A^2y^2 + B^2x^2 + A'^2B'^2 = 0,$$

d'où

$$B'^2x^2 - A'^2y^2 = -A'^2B'^2 \ldots\ldots (37).$$

Les quantités $2A'$ et $2B'$ sont encore nommées *axes principaux*, de l'hyperbole, en observant cependant que, pour l'équation (36), on entend par le demi-axe compté sur l'axe des y, le coefficient B' dans $B'\sqrt{-1}$, et que, pour l'équation (37), on entend par le demi-axe compté sur l'axe des x, le coefficient A' dans $A'\sqrt{-1}$. Les intersections de l'hyperbole par l'axe réel, sont les *sommets* de la courbe.

Nous observerons, quant à l'hyperbole, que, sous les hypothèses $B = 0$, $A = -C$, faites dans la réduite (20), les coefficiens M et N de y''^2 et x''^2 deviennent égaux ; ensorte que $A'^2 = B'^2$, et la transformée (36) se réduit à

$$y^2 - x^2 = -A'^2,$$

équation de *l'hyperbole équilatère* (40) au centre et aux axes principaux.

Si dans l'ellipse et l'hyperbole, on veut porter l'origine des coordonnées au sommet A (fig. 67), il faudra, pour la première courbe, poser l'abscisse CP ou $x = \text{CA} - \text{AP} = \text{A}' - x'$, et pour la seconde, poser $\text{C}p$ ou $x = \text{CA} + \text{A}p = \text{A}' + x'$, substitutions qui changeront les équations (35) et (36) dans celles-ci

$$\text{A}'^2y'^2 + \text{B}'^2x'^2 - 2\text{A}'\text{B}'^2x' = 0 \ldots\ldots (38),$$
$$\text{A}'^2y'^2 - \text{B}'^2x'^2 - 2\text{A}'\text{B}'^2x' = 0 \ldots\ldots (39).$$

Pour transporter l'origine en A', on fera pour l'ellipse et l'hyperbole, $x = x' - \text{A}'$, et les équations (35) et (36) deviendront

$$\text{A}'^2y'^2 + \text{B}'^2x'^2 - 2\text{A}'\text{B}'^2x' = 0 \ldots\ldots (38'),$$
$$\text{A}'^2y'^2 - \text{B}'^2x'^2 + 2\text{A}'\text{B}'^2x' = 0 \ldots\ldots (39').$$

En rapprochant les équations (35) et (36) de l'ellipse et de l'hyperbole, rapportées au centre, et les équations (38') et (39') de ces mêmes courbes rapportées au sommet, on voit que l'équation de l'hyperbole n'est que celle de l'ellipse, en changeant dans celle-ci B' en $\text{B}'\sqrt{-1}$: dans les équations (38) et (39), les abscisses x' sont prises dans des sens contraires.

59. Il est essentiel de remarquer que, dans la réduction au centre et aux axes principaux, les expressions de M et N, trouvées (55), et qui reviennent à celles-ci,

$$\text{M} = \text{A} \times \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{\text{B}}{2} \sin 2\alpha + \text{C} \times \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\text{N} = \text{A} \times \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{\text{B}}{2} \sin 2\alpha + \text{C} \times \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

se transforment l'une dans l'autre, en changeant les signes de $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$: comme le signe de $\tang 2\alpha$ n'emporte pas nécessairement un système déterminé de signes de $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$, il en résulte qu'on peut être conduit à prendre M pour N, et réciproquement, et qu'ainsi la courbe construite sur les axes principaux, peut prendre une position fausse par rapport aux

axes primitifs. On évite cette erreur en employant les formules plus expéditives (26) et (28), que nous allons d'abord déduire d'une autre considération.

On sait (53) que l'équation des courbes qui admettent un centre, peut toujours être rappelée à la forme

$$my^2 + 2nxy + px^2 = P;$$

les axes des x et y qui se coupent au centre, étant parallèles aux axes primitifs de l'équation générale, et que les mêmes courbes rapportées aux axes principaux, sont représentées par

$$My'^2 + Nx'^2 = P;$$

ensorte que si l'on fait dans celle-ci les substitutions

$$x' = y \sin \alpha + x \cos \alpha, \quad y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

qui font passer d'un système à un autre système d'axes rectangulaires, sans déplacement de l'origine, on doit retomber sur la première. Il faut observer ici que, dans le retour de la seconde à la première équation, l'angle α doit être compté dans un sens contraire à celui dans lequel il était pris, en passant de la première équation à la seconde, et qu'ainsi on doit changer les signes des termes qui renferment $\sin \alpha$ dans les formules relatives au changement de direction des axes. Effectuant ce calcul, et égalant les coefficiens des carrés et des rectangles des coordonnées, on est conduit à ces relations.

$$\left.\begin{aligned} m &= M \cos^2\alpha + N \sin^2 \alpha \\ p &= M \sin^2\alpha + N \cos^2 \alpha \\ n &= (N - M) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (40).$$

La différence des deux premières donnera

$$m - p = (M - N)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha);$$

d'où l'on tire

$$\cos 2\alpha = \frac{m-p}{M-N},$$

et la troisième, multipliée par 2, donne

$$\sin 2\alpha = \frac{2n}{N - M} \ldots (41),$$

conséquemment,

$$\tang 2\alpha = -\frac{2n}{m-p};$$

d'ailleurs en opérant par addition et multiplication sur les deux premières équations (40), on trouve

$$\begin{aligned} M + N &= m + p, \\ MN &= mp - n^2; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que M et N sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - (m + p)\, z + mp - n^2 = 0 \ldots\ldots (42);$$

mais des deux angles qui fixent les positions des axes principaux par rapport aux axes passant par le centre, parallèlement aux axes primitifs, l'un est toujours moindre qu'un droit; d'où il suit que $\sin 2\alpha$ est positif, et qu'ainsi la différence $N - M$ aura le signe de n, c'est-à-dire que si n est positif, on prendra pour N la plus grande racine de l'équation (42), et que si n est négatif, on prendra pour N la plus petite de ces racines. Ces formules (41) et (42) reviennent aux formules (26) et (28).

Lors donc qu'on voudra rappeler au centre et aux axes principaux, une ellipse ou une hyperbole, on la rapportera d'abord à son centre ou à la forme

$$my^2 + 2nxy + px^2 = P;$$

et comme les coefficiens m, $2n$ et p ne sont autres que les trois premiers coefficiens A, B, C de la proposée, on n'aura à calculer que P. On résoudra ensuite l'équation (42) dont les racines sont M et N, et, d'après le signe de n on prendra convenablement les coefficiens de y'^2 et x'^2.

60. Les exemples suivans jetteront le plus grand jour sur cette analyse des transformations.

Exemple I. L'ellipse de l'équation

$$5y^2 + 2xy + 5x^2 - 12y - 12x = 0,$$

rapportée au centre, est représentée par

$$5y^2 + 2xy + 5x^2 = 12:$$

on a donc

$$m = 5, \quad n = 1, \quad p = 5, \quad P = 12,$$

$$\cos 2\alpha = 0, \quad \sin 2\alpha = \frac{2}{N - M}, \quad \text{tang } 2\alpha = \infty;$$

et l'équation du second degré devient

$$z^2 - 10z + 24 = 0, \quad \text{d'où} \quad z = 4, \quad z = 6;$$

conséquemment,

$$N = 6, \quad M = 4:$$

l'ellipse rapportée au centre et aux axes, a donc pour équation

$$4y'^2 + 6x'^2 = 12, \quad \text{ou} \quad 2y'^2 + 3x'^2 = 6.$$

Exemple II. Ramener au centre et aux axes l'ellipse de l'équation

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0.$$

En posant $x = a + x'$, $y = b + y'$, et égalant à zéro les coefficiens de x' et y', on trouve $a = 1$, $b = 1$ et cette première transformée

$$y'^2 - 2x'y' + 2x'^2 = 1.$$

donc

$$m = 1, \quad n = -1, \quad p = 2, \quad P = 1,$$

$$\cos 2\alpha = \frac{-1}{M - N}, \quad \sin 2\alpha = \frac{-2}{N - M}, \quad \text{tang } 2\alpha = -2;$$

et l'équation du second degré devient

$$z^2 - 3z + 1 = 0,$$

d'où

$$z = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi $M=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $N=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, et la transformée devient

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}y'^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}x'^2=1,$$

d'où

$$(3+\sqrt{5})y'^2+(3-\sqrt{5})x'^2=2.$$

Recherchons cette transformée par l'analyse (55) : en partant de la première réduite

$$y'^2-2x'y'+2x'^2-1=0,$$

nous emploierons les substitutions

$$y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha,\qquad x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha,$$

qui donneront la transformée

$$\begin{aligned}&(\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha)y''^2\\&+(\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha)x''^2-1=0;\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}&(\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha)y''^2\\&+(\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-\sin 2\alpha)x''^2-1=0,\end{aligned}$$

sous cette condition de l'évanouissement du rectangle

$$-2\sin\alpha\cos\alpha-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

qui revient à

$$\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=0,\quad \text{d'où}\quad \operatorname{tang} 2\alpha=-2;$$

d'ailleurs,

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin 2\alpha=\frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}},\qquad \cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}};$$

si l'on prend sin 2α positivement, et cos 2α négativement, on aura

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

d'où

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Ces substitutions des valeurs de sin 2α, cos 2α, $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, faites dans la transformée à trois termes, donnent

$$(3+\sqrt{5})\,y''^2 + (3-\sqrt{5})\,x''^2 - 2 = 0,$$

qui répète la transformée ci-dessus.

Mais si l'on suppose sin 2α négatif, et conséquemment cos 2α positif, ce qui s'accorde encore avec la tangente négative, on tombera sur l'équation

$$(3-\sqrt{5})\,y''^2 + (3+\sqrt{5})\,x''^2 - 2 = 0$$

qui diffère de la précédente.

Exemple III. Soit l'équation

$$y^2 - 2xy + 2x^2 + 1 = 0,$$

qui, sous le caractère $B^2 - 4AC < 0$, ne représente rien; on a

$$m = 1,\ n = -1,\ p = 2,\ P = -1,\ \sin 2\alpha = -\frac{2}{N-M};$$

et l'équation du second degré

$$z^2 - 3z + 1 = 0$$

dont on a déjà trouvé les racines (ex. II); ensorte qu'on obtient cette transformée

$$(3+\sqrt{5})\,y''^2 + (3-\sqrt{5})\,x''^2 + 2 = 0:$$

impossible, parce que le premier membre est la somme de trois termes positifs.

Exemple IV. L'équation

$$y^2 + xy + x^2 = 0,$$

est celle d'un point : elle donne

$$m = 1, \quad n = \tfrac{1}{2}, \quad p = 1, \quad P = 0, \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{N - M},$$

et

$$z^2 - 2z + \tfrac{3}{4} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = 1 \pm \tfrac{1}{2};$$

conséquemment,

$$M = \tfrac{1}{2}, \qquad N = \tfrac{3}{2}.$$

Par l'analyse (55), on serait conduit à la transformée

$$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\, y''^2$$
$$+ (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\, x''^2 = 0,$$

et à cette condition de l'évanouissement du rectangle

$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

ces valeurs portées dans la transformée précédente, la réduisent à

$$y''^2 + 3x''^2 = 0,$$

équation qui ne peut être satisfaite que par $x'' = 0$, $y'' = 0$, coordonnées du centre dans lequel l'ellipse est concentrée.

Exemple V. Soit l'équation

$$y^2 - 2xy - x^2 - y + x + 1 = 0,$$

qu'on sait être à une hyperbole : en rapportant la courbe au centre, l'équation devient

$$y'^2 - 2x'y' - x'^2 + \tfrac{3}{4} = 0:$$

l'emploi des formules trigonométriques donne, en égalant à zéro le coefficient du rectangle, ces déterminations,

$$\sin 2\alpha = \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et cette transformée

$$y''^2 - x''^2 = -\frac{3}{4\sqrt{2}},$$

qui représente une hyperbole équilatère (58). Autrement, on a

$$m = 1, \quad n = -1, \quad p = -1, \quad P = -\tfrac{3}{4}, \quad \sin \alpha = \frac{-2}{N - M},$$

$$z^2 - 2 = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \pm \sqrt{2};$$

et conséquemment,

$$N = -\sqrt{2}, \quad M = \sqrt{2}:$$

on retombe donc sur la transformée ci-dessus.

Exemple VI. L'équation

$$y^2 - 2xy - y = 0,$$

qui représente le système de deux droites non parallèles, donne pour les coordonnées du centre,

$$b = 0, \quad a = -\tfrac{1}{2}:$$

on a, pour déterminer l'angle 2α, la condition

$2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$, d'où $\tan 2\alpha = 2$,

et la réduite est,

$$(1 + \sqrt{5})\, y''^2 - (-1 + \sqrt{5})\, x''^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y'' = \pm \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) x''.$$

Autrement, et en partant de la première réduite,

$$y^2 - 2xy = 0,$$

on a

$$m = 1, \quad n = -1, \quad p = 0, \quad P = 0, \quad \sin 2\alpha = \frac{-2}{N - M}.$$

$$z^2 - z - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

et conséquemment,

$$N = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad M = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

déterminations qui ramènent à la transformée ci-dessus.

Lorsqu'on a calculé pour l'ellipse ou l'hyperbole, les quantités M et N, il est facile d'en conclure les demi-axes principaux de ces courbes (58).

Exemple VII. L'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - x = 0,$$

est celle d'une parabole qu'on veut rapporter au sommet et à des axes rectangulaires. D'après l'analyse exposée (57), on posera les formules

$$y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \qquad x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$

et on trouvera pour résultat de ces substitutions,

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 y'^2 + 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)x'y' \\ &+ (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 x'^2 + [2(b-a)(\sin\alpha + \cos\alpha) + \sin\alpha]y' \\ &+ [2(b-a)(\sin\alpha - \cos\alpha) - \cos\alpha]x' + (b-a)^2 - a = 0;\end{aligned}$$

l'anéantissement du terme du rectangle, donne

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

par ces valeurs de sin α et cos α, la précédente devient

$$2y'^2 + \left[2(b-a)\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]y' - \frac{1}{\sqrt{2}}x' + (b-a)^2 - a = 0:$$

nous poserons donc

$$2(b-a)\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \qquad (b-a)^2 - a = 0,$$

équations qui donnent

$$b = -\tfrac{3}{16}, \qquad a = \tfrac{1}{16}.$$

Ainsi la parabole aura pour sommet le point qui répond à l'abscisse $\frac{1}{16}$, et à l'ordonnée $-\frac{3}{16}$; son diamètre ou axe principal, fera un angle de 50° avec une parallèle à l'axe des x, menée par le sommet que nous venons de déterminer, et l'équation de cette parabole sera

$$y^2 = \frac{1}{\sqrt{8}}x.$$

Exemple VIII. L'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - 1 = 0,$$

que nous avons reconnue (37) être celle de deux droites parallèles, donne la transformée

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 y'^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 x'^2\\ &+ 2(b-a)(\sin\alpha + \cos\alpha)\, y' + 2(b-a)(\sin\alpha - \cos\alpha)\, x'\\ &+ (b-a)^2 - 1 = 0;\end{aligned}$$

et pour condition de l'évanouissement du rectangle,

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4};$$

par ces valeurs, l'équation précédente se réduit à

$$2y'^2 + 2\sqrt{2}(b-a)y' + (b-a)^2 - 1 = 0,$$

qui ne renferme plus qu'une des variables. Pour déterminer les coordonnées du sommet, il faudrait poser

$$(b-a) = 0, \qquad (b-a)^2 - 1 = 0;$$

et comme ces équations sont en contradiction, les coordonnées a et b sont infinies (Alg., 1re sect., chap. 17), et de là on infère que la parabole dégénère en deux droites (36 et 37).

Exemple IX. Pour l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 = 0,$$

l'évanouissement du terme du rectangle donnerait encore

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et on aura pour déterminer les coordonnées a et b du sommet,

$$a - b = 0, \qquad (a-b)^2 = 0:$$

de ce que a et b sont indéterminées, c'est-à-dire, de la forme $\frac{0}{0}$,

où conclut (Alg., 1re sect., chap. 17) que la proposée représente une droite (36 et 37).

Example X. Soit

$$y^2 - 2xy + x^2 + 1 = 0:$$

on trouvera encore

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et pour équations entre les coordonnées du sommet,

$$b - a = 0, \qquad (b - a)^2 + 1 = 0,$$

dont la seconde est la somme de deux carrés; et comme elle répète la proposée, on en conclut que celle-ci ne représente rien.

61. Il importe cependant d'avoir des formules qui servent à déterminer directement la grandeur et la situation des axes principaux dans les trois courbes du premier ordre : tel est l'objet de l'analyse suivante qui est le complément nécessaire de ce qui précède.

Reprenons les expressions (58),

$$M = -\frac{P}{B'^2}, \qquad N = -\frac{P}{A'^2};$$

ou

$$M = -\frac{F'}{B'^2}, \qquad N = -\frac{F'}{A'^2} \ldots\ldots (43),$$

et substituons dans

$$F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F,$$

les valeurs de a et b, savoir (55)

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \qquad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

on trouvera, après les réductions,

$$F' = \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC} + F \ldots (44);$$

ensorte qu'après avoir remplacé dans les formules (43), M, N et F′ par leurs valeurs (24) et (44), on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} A'=\sqrt{\left[\dfrac{2\left[BDE-AE^2-CD^2-(B^2-4AC)F\right]}{(B^2-4AC)\left[A+C-\sqrt{B^2-4AC+(A+C)^2}\right]}\right]} \\ B'=\sqrt{\left[\dfrac{2\left[BDE-AE^2-CD^2-(B^2-4AC)F\right]}{(B^2-4AC)\left[A+C+\sqrt{B^2-4AC+(A+C)^2}\right]}\right]} \end{array}\right\}(45).$$

Ainsi le centre sera donné par les valeurs de a et b, les grandeurs des axes par celles de A' et B', et leurs directions par celle de tang 2α donnée (55).

Sous les hypothèses $B=0$, $A=C$, ces deux valeurs de A' et B' deviennent égales, et l'ellipse se change en un cercle; même conclusion à l'égard de A' et B' pour $B=0$ et $A=-C$, relations sous lesquelles l'hyperbole devient équilatère. D'ailleurs, suivant qu'on aura, sous la caractéristique de l'hyperbole,

$$BDE-AE^2-CD^2-(B^2-4AC)\,F>0 \text{ ou } <0,$$

A' sera imaginaire et B' réel, ou inversement. On observera que le premier membre des inégalités ci-dessus, répète le facteur de $4A$ ou de $4C$ (38).

Considérons le cas de la parabole caractérisée par $B^2-4AC=0$, courbe pour laquelle on a, d'après les formules (24),

$$M=A+C,\quad N=0;$$

on a été conduit (57) à ces deux conditions

$$Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=0,$$
$$D'\cos\alpha-E'\sin\alpha=0,$$

sous lesquelles il reste cette transformée

$$My''^2+(D'\sin\alpha+E'\cos\alpha)\,x''=0\ldots.(46):$$

on a de plus (57)

$$\text{tang}\,2\alpha=-\frac{B}{A-C};$$

mais d'ailleurs,

$$\text{tang}\,2\alpha=\frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}^2\alpha};$$

l'égalité de ces deux valeurs donne

$$\mathrm{B}\,\mathrm{tang}^2\alpha - 2(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{B} = 0,$$

qui n'est que l'équation (19′) : on en tire

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{C} \pm \sqrt{\mathrm{B}^2+(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2}}{\mathrm{B}} = \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C}) \pm (\mathrm{A}+\mathrm{C})}{\mathrm{B}},$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \qquad \mathrm{tang}\,\alpha = -\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

D'un autre côté, l'équation (29) et les formules (11) et (12) donnent

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{E}'} = \frac{2\mathrm{A}b + \mathrm{B}a + \mathrm{D}}{2\mathrm{C}a + \mathrm{B}b + \mathrm{E}},$$

valeur qui ne peut s'accorder avec $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, parce qu'en supposant cette égalité, et tenant compte de $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$, on en conclut $\mathrm{BD} - 2\mathrm{AE} = 0$, relations qui annoncent deux droites (36). Il faudra donc prendre $\mathrm{tang}\,\alpha = -\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$: en égalant cette valeur à la précédente, et résolvant l'équation par rapport à a, il viendra

$$a = -\frac{2\mathrm{B}(\mathrm{A}+\mathrm{C})\,b + (\mathrm{BD}+2\mathrm{CE})}{\mathrm{B}^2+4\mathrm{C}^2};$$

en portant cette valeur dans l'équation $\mathrm{F}' = 0$, et tenant compte de la relation $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$, le coefficient de b^2 disparaîtra, et il viendra

$$b = \frac{\mathrm{C}^2\mathrm{E}^2 + \mathrm{ABDE} + 2\mathrm{ACE}^2 - \mathrm{ACD}^2 - 4\mathrm{CF}(\mathrm{A}+\mathrm{C})^2}{2(\mathrm{A}+\mathrm{C})^2(2\mathrm{CD}-\mathrm{BE})},$$

et par suite,

$$a = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{D}^2 + \mathrm{BCDE} + 2\mathrm{ACD}^2 - \mathrm{ACE}^2 - 4\mathrm{AF}(\mathrm{A}+\mathrm{C})^2}{2(\mathrm{A}+\mathrm{C})^2(2\mathrm{AE}-\mathrm{BD})};$$

on a en outre,

$$D' \sin \alpha + E' \cos \alpha = (D' \operatorname{tang} \alpha + E') \cos \alpha = -\frac{2CD - BE}{\sqrt{B^2 + 4C^2}},$$

en observant que de $\operatorname{tang} \alpha = -\frac{2C}{B}$, on tire

$$\cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4C^2}}.$$

Ainsi la transformée (46) de la parabole, devient

$$y''^2 = \frac{2CD - BE}{(A + C)\sqrt{B^2 + 4C^2}}\, x''.$$

Si l'on remplace B par $2\sqrt{AC}$, et qu'on désigne le coefficient de x'' par Q, on aura ces formules :

$$\left.\begin{array}{c}
\operatorname{tang} \alpha = -\sqrt{\dfrac{C}{A}}, \qquad Q = \dfrac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{(A+C)\sqrt{A+C}} \\
a = \dfrac{AD^2\sqrt{A} + 2CDE\sqrt{C} + 2CD^2\sqrt{A} - CE^2\sqrt{A} - 4F(A+C)^2\sqrt{A}}{4(A+C)^2(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})} \\
b = \dfrac{CE^2\sqrt{C} + 2ADE\sqrt{A} + 2AE^2\sqrt{C} - AD^2\sqrt{C} - 4F(A+C)^2\sqrt{C}}{4(A+C)^2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}
\end{array}\right\} (47).$$

qui donnent la direction de l'axe principal de la parabole, le paramètre, et les coordonnées du sommet, en coefficiens de l'équation proposée.

On peut faire l'application de ces formules aux exemples précédens.

CHAPITRE VIII.

Des diamètres conjugués.

62. Il résulte de ce qui a été démontré (54), qu'il existe, au moins, un système d'axes obliques par rapport auxquels l'équation générale prend la forme

$$My^2 + Nx^2 + P = 0 \ldots (1),$$

pour les deux courbes qui ont un centre, et celle-ci

$$My^2 + Qx = 0 \ldots (2),$$

pour la parabole. Mais les formules par lesquelles on passe d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques en déplaçant l'origine, contenant les quatre quantités a, b, α, α' (chap. III, prob. III), il s'ensuit qu'on peut disposer de trois de ces quantités de manière à obtenir la réduite (1), et qu'il en reste une indéterminée, ensorte qu'il pourrait exister une infinité de ces systèmes d'axes obliques se coupant au centre de la courbe, et pour chacun desquels l'équation de la courbe serait toujours représentée par (1) : ces axes se nomment *diamètres conjugués.*

63. Nous prouverons d'abord que toute ligne menée par le centre, et terminée de part et d'autre à la courbe, est divisée au centre en deux parties égales : en effet, l'équation d'une droite menée par le centre pris pour origine des coordonnées, est

$$y = ax;$$

combinant cette équation avec celle de l'ellipse (58),

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

on obtient ces coordonnées des intersections,

$$x = \pm \frac{A'B'}{\sqrt{A'^2a^2 + B'^2}}, \quad y = \pm \frac{aA'B'}{\sqrt{A'^2a^2 + B'^2}};$$

d'où l'on conclut l'égalité des deux portions de la droite dans toutes ses positions autour du centre. On trouve pour l'hyperbole,

$$x = \pm \frac{A'B'}{\sqrt{B'^2 - A'^2a^2}}, \quad y = \pm \frac{aA'B'}{\sqrt{B'^2 - A'^2a^2}};$$

coordonnées qui ne sont réelles que depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \pm \frac{B'}{A'}$, inclinaisons sous lesquelles elles deviennent infinies, et nous verrons plus loin qu'alors la droite, dans ces deux positions, devient *asymptote*.

64. En recherchant les systèmes de diamètres conjugués, ou d'axes obliques par rapport auxquels les équations de l'ellipse et de l'hyperbole prennent la forme (1), on doit supposer l'origine au centre, et alors il sera plus commode de partir des équations de ces courbes déjà rapportée à leurs axes principaux que nous désignerons désormais par 2A et 2B. Ainsi, pour l'ellipse, nous ferons dans l'équation

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

ces substitutions (chap. III, prob. III)

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \qquad x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha';$$

le coefficient du terme $x'y'$ donné en partie par y^2, en partie par x^2, égalé à zéro, fournit cette condition

$$A^2 \sin\alpha \sin\alpha' + B^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0;$$

d'où résulte

$$\text{tang}\,\alpha\;\text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}\ldots(3):$$

des deux angles α et α', dont le premier sert à fixer l'inclinaison de l'axe des x', et le second l'inclinaison des y' sur celui des x, l'un est donc aigu et l'autre obtus. La transformée est

$$\begin{aligned}&(A^2 \sin^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha')\, y'^2 \\ &+ (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha)\, x'^2 = A^2B^2\ldots(4).\end{aligned}$$

Si dans cette équation on fait successivement $y' = 0$, $x' = 0$, on aura les coordonnées des intersections de la courbe avec les axes des x' et des y'. Soient A', B' ces demi-diamètres comptés sur x' et y', à partir du centre, on trouvera

$$A'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha}\ldots(5),$$

$$B'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2 \sin^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha'}\ldots(6).$$

Si l'on tire de (5) et (6) les dénominateurs, pour en porter les valeurs dans (4), on obtiendra cette équation de la courbe

$$A'^2 y'^2 + B'^2 x'^2 = A'^2 B'^2\ldots(7).$$

L'équation (3) faisant dépendre tang α de tang α', et réciproquement, il faudra se donner l'un de ces angles pour avoir l'autre : il existe donc une infinité de systèmes d'axes obliques par rapport à chacun desquels l'équation de l'ellipse est de même forme que celle de cette courbe rapportée aux axes principaux, et c'est parce que la position de l'un de ces axes est liée à celle de l'autre, ensorte qu'ils font système, qu'on a nommé *diamètres conjugués* les portions $2A'$ et $2B'$ de ces axes obliques, comprises dans la courbe. Il est bien essentiel d'observer qu'il n'est aucune droite menée par le centre de la courbe, qui ne puisse être prise pour l'un des axes de ces systèmes.

65. Soit $\alpha' = 0$, et par là on fait coïncider l'axe $2A'$ avec

celui des x ou avec l'axe $2A$. On a, d'après (3),

$$\tang \alpha' = -\frac{B^2}{0} = \infty;$$

donc $\alpha' = \frac{\pi}{2}$; ainsi l'autre diamètre $2B'$ conjugué de $2A'$, se confond avec celui des y, ou avec l'axe $2B$. Le système d'axes rectangulaires n'est donc qu'un cas particulier des systèmes d'axes obliques conjugués. Pour $A = B$, on a

$$\tang \alpha \tang \alpha' = -1,$$

ce qui apprend que, dans le cercle, tous les diamètres conjugués sont à angles droits : d'ailleurs comme les expressions (5) et (6) donnent, sous la même hypothèse,

$$A'^2 = \frac{A^2}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = A^2, \quad B'^2 = \frac{A^2}{\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha'} = B^2,$$

on voit de plus que tous ces diamètres sont égaux.

66. Si maintenant on repasse des axes obliques $2A'$, $2B'$ aux axes rectangulaires $2A$, $2B$, on aura pour la même courbe, deux équations identiques, propres à faire découvrir quelques relations entre les diamètres conjugués et les axes principaux de l'ellipse. A cet effet, on fera dans (7) ces substitutions (chap. III, prob. V)

$$y' = \frac{y \cos\alpha - x \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}, \quad x' = \frac{x \sin\alpha' - y \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)},$$

l'équation résultante sera

$$(A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2\alpha')y^2 + (-2A'^2\sin\alpha\cos\alpha - 2B'^2\sin\alpha'\cos\alpha')xy$$
$$+ (A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2\alpha')x^2 = A'^2B'^2\sin^2(\alpha' - \alpha) = 0 \ldots\ldots (8);$$

et comme elle doit être identique avec celle de l'ellipse rapportée au centre et aux axes, on aura ces relations

$$A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2\alpha' = A^2 \ldots\ldots (9),$$
$$A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2\alpha' = B^2 \ldots\ldots (10);$$

$$A'^2B'^2 \sin^2(\alpha'-\alpha) = A^2B^2 \ldots\ldots(11),$$

et

$$A'^2 \sin\alpha \cos\alpha + B'^2 \sin\alpha' \cos\alpha' = 0 \ldots.(12).$$

Les équations (9) et (10) ajoutées, donnent cette propriété

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2 \ldots.(13),$$

et de l'équation (11) on déduit celle-ci

$$A'B' \sin(\alpha'-\alpha) = AB \ldots(14).$$

Ainsi, 1° *la somme des carrés des demi-axes, est égale à la somme des carrés des demi-diamètres, 2° le rectangle des premiers est égal au parallélogramme des seconds*, en observant que $\alpha'-\alpha$ est l'angle compris entre A' et B'; qu'ainsi $B' \sin(\alpha'-\alpha)$ est la hauteur du parallélogramme, lorsque le demi-diamètre A' est pris pour base.

Mais $2A''$ et $2B''$ étant un autre système de diamètres conjugués, on a aussi

$$A^2 + B^2 = A''^2 + B''^2;$$
$$AB = \sin(\alpha''' - \alpha'')A''B'';$$

donc

$$A'^2 + B'^2 = A''^2 + B''^2 \ldots\ldots.(15),$$
$$A'B' \sin(\alpha'-\alpha) = A''B'' \sin(\alpha'''-\alpha'') \ldots.(16).$$

etc.

On déduit de là que *tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, de manière que leurs côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués, sont équivalens entr'eux et au rectangle construit sur les deux axes* : d'où il ne faut pas conclure que tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, sont équivalens.

67. Si l'on voulait un système de diamètres conjugués égaux, il faudrait déterminer les angles α, α' d'après la condition

$$A^2 \sin^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha = A^2 \sin^2\alpha' + B^2 \cos^2\alpha',$$

donnée par les expressions (5) et (6) : on en déduit

$$\cos^2\alpha\,(A^2 \tang^2\alpha + B^2) = \cos^2\alpha'\,(A^2 \tang^2\alpha' + B^2),$$

équation satisfaite par $\tang^2 \alpha = \tang^2 \alpha'$, puisqu'on a en même temps $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha'$; de là résulte

$$\tang \alpha = - \tang \alpha',$$

parce que, d'après la relation (3), le produit de ces tangentes est négatif : donc à cause de

$$\tang^2 \alpha = + \frac{B^2}{A^2}, \quad \text{on a} \quad \tang \alpha = \pm \frac{B}{A};$$

le signe supérieur étant relatif au diamètre $2A'$, par exemple, et l'inférieur au diamètre $2B'$. Ainsi pour construire ces diamètres égaux, (fig. 69), on joindra l'extrémité B du demi-second axe CB avec les extrémités A et A′ du premier ; la tangente de l'angle BAX sera $- \frac{B}{A}$, et celle de l'angle BA′X sera $+ \frac{B}{A}$; ensorte que les deux diamètres menés par le centre, parallèlement à ces cordes, seront égaux, et ce système de diamètres est unique : on remarque encore que ces diamètres sont les deux diagonales d'un rectangle formé par les tangentes aux extrémités des deux axes principaux. Par rapport à ce système de diamètres, l'équation de l'ellipse devient

$$y'^2 + x'^2 = A'^2.$$

D'une autre part, la propriété (13) donne pour $A' = B'$,

$$2A'^2 = A^2 + B^2, \qquad \text{d'où} \qquad A' = \pm \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}},$$

expression qui fournit une construction bien simple des diamètres conjugués égaux. Quant à l'abscisse CP du point M, où aboutit le diamètre A', on a

$$A'^2 = x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2),$$

et en remplaçant y^2 par sa valeur $B^2 - \frac{B^2 x^2}{A^2}$, on trouve

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}};$$

comme ce résultat est indépendant de B, *on voit que, pour toutes les ellipses décrites sur le même grand axe, les extrémités des diamètres conjugués égaux, ont même abscisse.*

68. Les trois équations (9), (10) et (11) renferment les six quantités A, B, A′, B′, α, α'; ensorte que trois d'entr'elles étant données, on peut toujours découvrir les trois autres. Supposons, par exemple, qu'on connaisse les demi-diamètres conjugués A′, B′, et l'angle $\alpha' - \alpha$ qu'ils font entr'eux, et qu'on demande les demi-axes A et B. En ajoutant à l'équation (13) le double de l'équation (14), et retranchant de (13) le double de (14), puis extrayant la racine carrée des deux membres des équations résultantes, on trouvera

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \sqrt{[\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + 2\mathrm{A}'\mathrm{B}' \sin(\alpha' - \alpha)]},$$
$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \sqrt{[\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 - 2\mathrm{A}'\mathrm{B}' \sin(\alpha' - \alpha)]};$$

d'où il est aisé de déduire séparément A et B, qu'on construira par le triangle obliquangle. Nous donnerons bientôt une autre solution de cette question.

69. De l'équation de l'ellipse

$$\mathrm{A}'^2y^2 + \mathrm{B}'^2x^2 = \mathrm{A}'^2\mathrm{B}'^2,$$

rapportée au centre et aux diamètres conjugués 2A′ et 2B′, on peut passer à la suivante,

$$\mathrm{A}'^2y^2 + \mathrm{B}'^2x'^2 - 2\mathrm{B}'^2\mathrm{A}'x' = 0 \ldots (17),$$

par la substitution $x = \mathrm{A}' - x'$ qui transporte l'origine de C en M (fig. 69); la courbe est alors rapportée à un système d'axes obliques dont l'un est le diamètre MM′, et l'autre une tangente TM*t* parallèle au diamètre NN′ conjugué de MM′, puisque pour $x' = 0$, on a $y = \pm 0$, ce qui prouve que l'axe des y n'a que le point M commun avec la courbe. Par rapport à ce système d'axes MM′, T*t*, l'équation de l'ellipse conserve la forme que nous lui avons trouvée (58) pour l'axe 2A, et un axe des y tangent au sommet.

70. De cette propriété dont jouit tout diamètre, de diviser en deux parties égales les cordes parallèles à son conjugué, on tire cette construction pour trouver le centre d'une ellipse : on mène dans cette courbe deux cordes parallèles, et une corde qui les divise également ; le milieu de cette corde est le centre de l'ellipse : on reconnaîtra même que cette dernière corde est l'un des axes principaux, si elle est perpendiculaire aux cordes parallèles. On peut aussi géométriquement résoudre ces questions sur lesquelles nous reviendrons plus loin. 1°. *Trouver la position des axes principaux lorsque l'on connaît le centre ;* 2°. *un diamètre étant donné, trouver son conjugué.*

71. Passons à l'hyperbole : si dans son équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 ;$$

on fait ces substitutions employées (64), savoir :

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \quad x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$

on obtiendra la transformée

$$(A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha')y'^2 + (A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)x'^2 = -A^2B^2 \ldots (18),$$

et cette condition de l'évanouissement du rectangle,

$$A^2 \sin\alpha \sin\alpha' - B^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0,$$

d'où résulte

$$\tang\alpha \tang\alpha' = \frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots (19).$$

Si l'on suppose successivement $y' = 0$, $x' = 0$, et qu'on représente encore par A' et B' l'abscisse et l'ordonnée correspondantes, on trouvera

$$A'^2 = \frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha}, \quad B'^2 = \frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha'} \ldots (20) :$$

l'équation (18) prendra donc la forme

$$A'^2y'^2 + B'^2x'^2 = A'^2B'^2 \ldots (21).$$

Or si l'on suppose le demi-diamètre A′ réel, ce qui n'a lieu que sous la condition

$$B^2 \cos^2 \alpha > A^2 \sin^2 \alpha, \quad \text{d'où} \quad \tang \alpha < \frac{B}{A},$$

on aura nécessairement, d'après la relation (19),

$$\tang \alpha' > \frac{B}{A}, \quad \text{d'où} \quad B^2 \cos^2 \alpha' < A^2 \sin^2 \alpha',$$

et conséquemment le demi-diamètre B′ sera imaginaire, ou de la forme $B'\sqrt{-1}$; ensorte que l'équation (21) deviendra

$$A'^2 y'^2 - B'^2 x'^2 = - A'^2 B'^2 \ldots . (22).$$

Réciproquement, du demi-diamètre B′ supposé réel, on conclurait A′ imaginaire et l'équation

$$B'^2 x'^2 - A'^2 y'^2 = - A'^2 B'^2 \ldots\ldots (23):$$

ces équations (22) et (23) sont analogues aux équations trouvées (58) pour les axes principaux.

72. Si dans l'équation (21) on fait les substitutions par lesquelles on repasse des coordonnées obliques aux coordonnées rectangulaires, on retombera sur une transformée identique avec l'équation de l'hyperbole aux axes rectangulaires, et cette identité donnera

$$\begin{aligned} A^2 &= A'^2 \cos^2 \alpha - B'^2 \cos^2 \alpha' \ldots\ldots (24), \\ -B^2 &= A'^2 \sin^2 \alpha - B'^2 \sin^2 \alpha' \ldots\ldots (25), \\ -A^2B^2 &= -A'^2B'^2 \sin^2(\alpha' - \alpha) \ldots . (26), \end{aligned}$$

ajoutant les deux premières, on obtient cette propriété

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2 \ldots\ldots (27),$$

et de la dernière on déduit celle-ci

$$AB = A'B' \sin(\alpha' - \alpha) \ldots\ldots (28);$$

ces résultats sont ceux que nous avons précédemment obtenus pour l'ellipse (66), en changeant dans ceux-ci B et B′ en $B\sqrt{-1}$ et $B'\sqrt{-1}$.

Ainsi, dans l'hyperbole, *la différence des carrés des demi-diamètres conjugués, est égale à la différence des carrés des demi-axes, et le parallélogramme construit sur des demi-diamètres, est égal au rectangle construit sur les demi-axes.*

De la propriété (27) on déduit pour $A = B$, la conclusion $A' = B'$ et réciproquement : l'hyperbole équilatère est donc la seule qui ait des diamètres conjugués égaux.

73. Nous avons reconnu (46) que l'équation

$$xy = M \ldots\ldots (29),$$

représentait une hyperbole dans laquelle les axes étaient asymptotes : or pour revenir de l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

à la précédente, il faut employer les substitutions qui font passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées obliques, sans changer l'origine, et égaler à zéro les coefficiens des carrés des variables dans la transformée

$$(A^2 \sin^2 \alpha' - B^2 \cos^2 \alpha')\, y'^2 + (A^2 \sin^2 \alpha - B^2 \cos^2 \alpha) x'^2$$
$$+ 2(A^2 \sin \alpha \sin \alpha' - B^2 \cos \alpha \cos \alpha')\, x'y' = -A^2B^2 \ldots (30);$$

on a donc ces deux conditions

$$\operatorname{tang}^2 \alpha' = \frac{B^2}{A^2}, \qquad \operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{B^2}{A^2};$$

d'où résultent ces deux valeurs

$$\operatorname{tang} \alpha' = -\frac{B}{A}, \qquad \operatorname{tang} \alpha = +\frac{B}{A} \ldots (31),$$

ou celles-ci

$$\operatorname{tang} \alpha' = +\frac{B}{A}, \qquad \operatorname{tang} \alpha = -\frac{B}{A} \ldots (32);$$

puisqu'autrement les deux axes n'en feraient qu'un : or en adoptant les valeurs (32), l'angle α se rapporte à l'asymptote

CX′ (fig. 70) sur laquelle on compte les x', et l'angle α' est relatif à l'autre asymptote CY′; ainsi on déterminera ces deux asymptotes en menant par le sommet A une tangente indéfinie sur laquelle on prendra $AB' = -B$, $AB = +B$, ensorte que CB′, CB seront les axes asymptotiques. Mais si l'on regarde comme positives les coordonnées des points de la branche mAM, et conséquemment comme négatives celles de la branche $m'AM'$, le rectangle $x'y'$ sera positif dans toute l'étendue de l'hyperbole, ce qui exige que dans la transformée

$$2(A^2 \sin\alpha \sin\alpha' - B^2 \cos\alpha \cos\alpha')\, x'y' = -A^2B^2$$

le coefficient du rectangle soit négatif, condition qui est satisfaite par $\sin\alpha$ négatif, les autres lignes trigonométriques étant positives, et alors on a

$$\sin\alpha \sin\alpha' = \frac{-B^2}{A^2+B^2}, \quad \cos\alpha \cos\alpha' = \frac{A^2}{A^2+B^2},$$

et pour transformée

$$\frac{-4A^2B^2}{A^2+B^2}\, x'y' = -A^2B^2, \quad \text{d'où} \quad x'y' = \frac{A^2+B^2}{4}.$$

Des valeurs (32) comparées à celles-ci

$$\tang\alpha = \pm \frac{B}{A},$$

qui fixent la position des diamètres égaux de l'ellipse (67), on conclut que ces diamètres prolongés deviennent les asymptotes d'une hyperbole construite sur les mêmes axes, en observant que le prolongement de 2B′ devient l'axe des x', et que celui de 2A′ devient l'axe des y'.

Lorsque $B = A$, on a, d'après (32),

$$\tang\alpha' \tang\alpha + 1 = 0,$$

ce qui indique que les asymptotes sont à angles droits dans l'hyperbole équilatère (47).

74. Il nous reste à rechercher s'il existe dans la parabole

un système d'axes obliques par rapport auxquels son équation conserve la forme

$$y^2 = 2px,$$

ce qui exige que l'un des axes, celui des y', ne fasse que toucher la courbe, et que l'axe des x' divise également les cordes parallèles aux y' : alors l'origine est l'un des points de la courbe. On emploiera donc ces substitutions

$$y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \quad x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha'$$

qui font passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques en déplaçant l'origine (chap. III, probl. III) : on a pour transformée

$$\begin{aligned} &y'^2 \sin^2\alpha' + 2x'y' \sin\alpha \sin\alpha' + x'^2 \sin^2\alpha \\ &+ 2(b \sin\alpha' - p\cos\alpha')\, y' \\ &+ 2(b\sin\alpha - p\cos\alpha)\, x' + b^2 - 2ap = 0 \ldots\ldots(33), \end{aligned}$$

ainsi sous ces conditions

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\alpha \sin\alpha' = 0, & \sin^2\alpha = 0, \\ b\sin\alpha' - p\cos\alpha' = 0, & b^2 - 2ap = 0 \end{array}\right\} \ldots (34),$$

la transformée deviendra

$$y'^2 + \frac{2(b\sin\alpha - p\cos\alpha)}{\sin^2\alpha'}\, x' = 0 \ldots\ldots(35),$$

et elle aura la forme de la proposée. Or la seconde des équations (34) donne $\sin\alpha = 0$, valeur qui satisfait à la première, et qui apprend que l'axe des x' est parallèle à celui des x, ou à l'axe principal de la parabole : il ne reste donc que les deux dernières équations (34) pour déterminer α' et les coordonnées a et b de la nouvelle origine qu'on reconnaît être sur la parabole, puisque ses coordonnées a et b satisfont à l'équation $y^2 - 2px = 0$: ainsi l'une de ces trois quantités, a, par exemple, sera arbitraire, et, d'après la troisième équation, l'inclinaison α' de l'axe des y' sur celui des x', sera donnée par

$$\sin^2\alpha' = \frac{p^2}{b^2 + p^2} = \frac{p}{2a + p},$$

à cause de $b^2 = 2ap$: la transformée (35) qui est réduite à $y'^2 - \frac{2p}{\sin^2 \alpha'} x' = 0$ devient donc

$$y'^2 = (4a + 2p)\, x' \qquad \text{ou} \qquad y'^2 = 2p'x',$$

en faisant $2a + p = p'$. Ces axes A′X′, A′Y′ (fig. 71) pourraient encore être nommés *diamètres conjugués*, quoique la courbe n'admette pas de centre : le premier divise encore également les cordes mm' parallèles au second qui est tangent à l'origine A′.

75. Reprenons l'équation générale au centre

$$my^2 + 2nxy + px^2 = \mathrm{P},$$

employée (59), et soit

$$\mathrm{M}'y'^2 + \mathrm{N}'x'^2 = \mathrm{P},$$

l'équation pour un système d'axes obliques conjugués qui se coupent au centre : en substituant pour x' et y' les formules

$$x' = \frac{x \sin \alpha' - y \cos \alpha'}{\sin \theta}, \qquad y' = \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\sin \theta},$$

qui font passer des axes obliques à des axes rectangulaires (chap. III, probl. V), formules dans lesquelles $\theta = \alpha' - \alpha$, et exprimant que l'équation résultante est identique avec la première, il viendra

$$\begin{aligned} \mathrm{M}' \cos^2 \alpha + \mathrm{N}' \cos^2 \alpha' &= m \sin^2 \theta, \\ \mathrm{M}' \sin^2 \alpha + \mathrm{N}' \sin^2 \alpha' &= p \sin^2 \theta, \\ \mathrm{M}' \sin \alpha \cos \alpha + \mathrm{N}' \sin \alpha' \cos \alpha' &= - n \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

On déduit de ces trois équations,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}' + \mathrm{N} &= (m + p) \sin^2 \theta \\ \mathrm{M}'\mathrm{N}' &= (mp - n^2) \sin^2 \theta \end{aligned}\right\} \ldots (36),$$

et par conséquent l'équation du second degré

$$z^2 - (m + p)\, z \sin^2 \theta + (mp - n^2) \sin^2 \theta = 0 \ldots\ldots (37),$$

dont les racines sont imaginaires, lorsqu'on a

$$(m + p)^2 \sin^2 \theta - 4(mp - n^2) < 0,$$

ce qui emporte la condition

$$mp - n^2 > 0, \quad \text{d'où} \quad n^2 - mp < 0;$$

laquelle n'a lieu que pour l'ellipse : de l'inégalité précédente, on tire

$$\sin^2 \theta < \frac{4(mp - n^2)}{(m+p)^2}.$$

Ainsi la plus petite valeur que puisse prendre $\sin \theta$, résulte de

$$\sin^2 \theta = \frac{4(mp - n^2)}{(m+p)^2} \ldots (38);$$

alors les racines de l'équation (37) sont égales, c'est-à-dire qu'on a $M' = N'$; or

$$\tang \theta = \tang(\alpha' - \alpha) = \frac{\tang \alpha' - \tang \alpha}{1 + \tang \alpha' \tang \alpha},$$

et en remplaçant $\tang \alpha'$ et $\tang \alpha$ par leurs valeurs (67), on a

$$\tang \theta = \frac{-2\frac{B}{A}}{1 - \frac{B^2}{A^2}} = \frac{-2BA}{A^2 - B^2}.$$

Donc l'angle θ étant obtus, et $\sin^2 \theta$ donné par l'équation (38), étant un *minimum*, nécessairement l'angle obtus formé par les diamètres conjugués égaux, est le plus grand de ceux que puissent former deux diamètres conjugués.

Ainsi lorsque l'angle θ entre les diamètres conjugués, sera donné, on pourra trouver l'équation numérique de la courbe rapportée à ce diamètre, puisqu'on a M' et N' par la résolution de l'équation du second degré : cependant comme cette analyse ne fournit pas de caractère pour distinguer entre les deux racines celle qu'on doit prendre pour M' ou pour N', il paraît nécessaire d'évaluer séparément M' et N' au moyen des équations (36) qui donnent

$$(M' - N')^2 = \sin^2 \theta \left[(m+p)^2 \sin^2 \theta - 4(mp - n^2)\right],$$

d'où

$$M' - N' = \sin\theta \sqrt{[(m+p)^2 \sin^2\theta - 4(mp - n^2)]}:$$

ajoutant cette égalité avec la première des égalités (36), on trouve

$$\left.\begin{array}{l} M' = \frac{1}{2}[(m+p)\sin^2\theta + \sin\theta\sqrt{(m+p)^2\sin^2\theta - 4(mp-n^2)}] \\ N' = \frac{1}{2}[(m+p)\sin^2\theta - \sin\theta\sqrt{(m+p)^2\sin^2\theta - 4(mp-n^2)}] \end{array}\right\} \ldots (39).$$

En faisant dans ces expressions $\sin\theta = 1$, et changeant M' et N' en M et N, on retombe sur celles-ci,

$$M = \frac{1}{2}[m + p + \sqrt{(m-p)^2 + 4n^2}],$$
$$N = \frac{1}{2}[m + p - \sqrt{(m-p)^2 + 4n^2}],$$

trouvées (55), en changeant m en A, p en C et $2n$ en B.

76. Faisons quelques applications.

Exemple I. Soit l'équation

$$5y^2 + 6xy + 5x^2 + 6y\sqrt{2} + 10x\sqrt{2} + 2 = 0:$$

on propose de rapporter la courbe qu'elle représente, au centre et à des diamètres capables d'un angle dont la tangente $= -\frac{5}{3}$.

D'abord on trouve pour les coordonnées du centre

$$b = 0, \qquad a = -\sqrt{2},$$

et pour transformée

$$5y'^2 + 6x'y' + 5x'^2 - 8 = 0;$$

on trouve ensuite pour seconde transformée

$$(5\sin^2\alpha' + 6\sin\alpha'\cos\alpha' + 5\cos^2\alpha')\,y''^2$$
$$+ (5\sin^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha)\,x''^2 - 8 = 0,$$

sous la condition

$$5\sin\alpha\sin\alpha' + 5\cos\alpha\cos\alpha' + 3\sin\alpha\cos\alpha' + 3\sin\alpha'\cos\alpha = 0,$$

qui est le coefficient du rectangle, égale à zéro : on en déduit après la division par $\cos\alpha \cos\alpha'$,

$$5 \tang\alpha \tang\alpha' + 5 + 3 \tang\alpha + 3 \tang\alpha' = 0 :$$

or, d'après l'énoncé,

$$\tang(\alpha' - \alpha) = -\tfrac{5}{3} = \frac{\tang\alpha' - \tang\alpha}{1 + \tang\alpha' \tang\alpha},$$

et de là

$$5 \tang\alpha \tang\alpha' + 5 - 5 \tang\alpha + 3 \tang\alpha' = 0;$$

ces deux équations donnant

$$\tang\alpha = 0, \qquad \tang\alpha' = -\tfrac{5}{3};$$

on a donc pour transformée

$$\tfrac{80}{34} y''^2 + 5x''^2 - 8 = 0.$$

En employant les formules données (75), on serait conduit à la transformée

$$5y''^2 + \tfrac{80}{34} x''^2 - 8 = 0.$$

L'équation aux axes est

$$4y^2 + x^2 = 4.$$

Exemple II. Rapporter immédiatement l'hyperbole de l'équation

$$y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0$$

à ses asymptotes : comme l'origine est au centre de la courbe, il suffira d'employer les formules

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \qquad x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$

et on trouvera ces conditions d'évanouissement des carrés des variables

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2 \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$
$$\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha' + 2 \sin\alpha' \cos\alpha' = 0,$$

dont l'une donnera les deux angles α et α', en observant que la première équation est composée au moyen de α, de la même manière que la seconde l'est au moyen de α'; la première donnè

$$\operatorname{tang}\alpha = 1 \pm \sqrt{2},$$

donc

$$\operatorname{tang}\alpha = 1 + \sqrt{2}, \qquad \operatorname{tang}\alpha' = 1 - \sqrt{2}:$$

nous prendrons sin α' négatif (73) et cos α' positif : de ces valeurs des tangentes, on déduit

$$\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}, \qquad \sin\alpha' = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}, \qquad \cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}};$$

ensorte que la transformée

$$(\sin\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha'\cos\alpha - \cos\alpha'\sin\alpha)x'y' + 1 = 0$$

devient, par ces substitutions,

$$x'y' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En employant la formule des asymptotes (chap. V), on trouverait pour équations de ces droites,

$$y = (1 \pm \sqrt{2})x,$$

et conséquemment,

$$\operatorname{tang}\alpha = 1 \pm \sqrt{2},$$

d'où résulte

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + 1 = 0,$$

ensorte que les asymptotes sont à angles droits.

Exemple III. Rapporter la parabole de l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 1 = 0,$$

à un système de diamètres conjugués capables d'un angle dont la tangente $= 1$. Les coordonnées de l'origine sont

$$a = -1, \quad b = 0;$$

on est ensuite conduit à ces déterminations

$$\text{tang}\,\alpha = 1, \quad \text{tang}\,\alpha' = \infty,$$

et on obtient pour équation réduite,

$$y'^2 - x'\sqrt{2} = 0.$$

On observera qu'à l'équation de condition sous laquelle le coefficient du rectangle disparaît, et qui est

$$\text{tang}\,\alpha(\text{tang}\,\alpha' - 1) - (\text{tang}\,\alpha' - 1) = 0, \quad \text{d'où} \quad \text{tang}\,\alpha = 1,$$

on doit joindre celle-ci

$$\text{tang}\,(\alpha' - \alpha) = 1,$$

qui est fournie par l'énoncé de la question.

CHAPITRE IX.

Des tangentes, normales, soutangentes, sounormales aux courbes du premier ordre, théorèmes généraux sur ces courbes, et problèmes.

77. La tangente à une ligne du second degré, est une droite qui n'a qu'un point de commun avec cette courbe, et qui la laisse toute entière d'un même côté. La première condition seule serait insuffisante pour caractériser la tangente; car l'axe principal de la parabole qui n'a qu'un point commun avec la courbe, n'est pas une tangente, mais une sécante.

78. Nous résoudrons la question des tangentes, en partant de l'équation la plus générale du second degré entre deux variables.

Soit donc l'équation générale.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots (1)$$

aux coordonnées rectangulaires, et soit (fig. 72) M′ le point $x'y'$ auquel on doit mener une tangente : comme ce point est l'un de ceux de la courbe, ses coordonnées $x'y'$ doivent satisfaire à l'équation (1) : on aura donc en même temps

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0 \ldots (2).$$

Par le point M′ nous supposerons une sécante SM′M″ qui deviendra la tangente cherchée TM′t, en la faisant tourner autour de M′ jusqu'à ce que le point M″ coïncide avec M′ : car alors

la position du point M′ de tangence sur la courbe. On aura donc

$$\text{soutang} = \frac{(2Ay' + Bx' + D)y'}{By' + 2Cx' + E} \dots (10).$$

80. On appelle *normale* à une courbe, la perpendiculaire M′N à la tangente au point de tangence. Si l'on désigne par a' la tangente de l'angle M′NX, on doit avoir entre a' et la tangente a la relation $aa' + 1 = 0$, d'où $a' = -\frac{1}{a}$: ainsi l'équation de la normale, sera

$$y - y' = \frac{2Ay' + Bx' + D}{By' + 2Cx' + E}(x - x') \dots (11),$$

x et y étant les coordonnées générales de la normale.

81. La *sounormale* est la portion P′N de l'axe des abscisses, comprise entre le pied P′ de l'ordonnée et la rencontre N de cet axe par la normale : si donc on fait dans (11) $y = 0$, la valeur correspondante de $x - x' = AN - AP' = P'N$ sera cette sounormale, et on aura

$$\text{sounorm} = -\frac{(By' + 2Cx' + E)y'}{2Ay' + Bx' + D} \dots (12).$$

La soutangente et la sounormale ont des signes contraires, et, en effet, ces lignes s'étendent sur l'axe, à partir de P′, dans des sens contraires. Il est aisé de prouver qu'abstraction faite du signe, le produit de la soutangente par la sounormale est y^2.

82. On sait que les courbes qui admettent un centre sont comprises dans l'équation

$$My^2 + Nx^2 + P = 0,$$

identique avec la proposée, en posant $A = M$, $B = 0$, $C = N$, $D = 0$, $E = 0$, $F = P$; reportant ces valeurs dans (8), (9),

(10), (11) et (12), on trouve

$$a = -\frac{Nx'}{My'} \ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

$$y - y' = -\frac{Nx'}{My'}(x - x') \ldots (14),$$

$$\text{sout} = \frac{My'^2}{Nx'} \ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

$$y - y' = \frac{My'}{Nx'}(x - x') \ldots (16),$$

$$\text{sounorm.} = -\frac{Nx'}{M} \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Pour les courbes rapportées au sommet et à un axe symétrique, et représentées par

$$My^2 + Nx^2 + Qx = 0,$$

on a

$$A = M,\quad B = 0,\quad C = N,\quad D = 0,\quad E = Q,\quad F = 0,$$

et

$$a = -\frac{2Nx' + Q}{2My'} \ldots\ldots\ldots\ldots (18),$$

$$y - y' = -\frac{2Nx' + Q}{2My'}(x - x') \ldots (19),$$

$$\text{sout} = \frac{2My'^2}{2Nx' + Q} \ldots\ldots\ldots\ldots (20),$$

$$y - y' = \frac{2My'}{2Nx' + Q}(x - x') \ldots (21),$$

$$\text{sounorm.} = -\frac{2Nx' + Q}{2M} \ldots\ldots\ldots\ldots (22),$$

83. Théorème I. 1°. *Si par un point pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second degré, on mène une suite de sécantes, et si par les deux points d'intersection de chacune d'elles, avec la courbe, on mène à cette même courbe deux*

tangentes terminées à leur point de concours, les tangentes qui aboutissent aux extrémités d'une même sécante, formeront une suite d'angles circonscrits dont les sommets seront tous sur une même ligne droite. 2°. Si l'on circonscrit à une ligne du second degré, une suite d'angles dont les sommets soient sur une même droite, située comme on le voudra sur le plan de la courbe, les sécantes qui joindront les points de contact des côtés de ces angles avec la courbe, concourront toutes en un même point.

Pour démontrer la première propriété, nous observerons d'abord qu'une ligne du second degré étant tracée sur un plan, il existe toujours une infinité de systèmes d'axes soit rectangulaires, soit obliques, tels que la courbe rapportée à ces axes, prenne la forme

$$ay^2 + cx^2 + dy + ex = 0 \dots (23),$$

l'origine étant en un point quelconque de la courbe. Si par un point x', y' pris sur la courbe, on lui mène une tangente, son équation sera, d'après la formule (9),

$$y - y' = -\frac{2cx' + e}{2ay' + d}(x - x'),$$

d'où l'on déduit

$$(2cx' + e)(x - x') + (2ay' + d)(y - y') = 0,$$

équation qu'on pourra mettre sous cette forme

$$(2cx' + e)x + (2ay' + d)y = 2ay'^2 + 2cx'^2 + dy' + ex';$$

mais parce que le point x', y' est sur la courbe, on doit avoir

$$ay'^2 + cx'^2 + dy' + ex' = 0 \dots (24):$$

en ajoutant le double de cette dernière équation à la précédente, et réduisant, l'équation de la tangente prend cette forme très-simple

$$(2cx' + e)x + (2ay' + d)y + ex' + dy' = 0 \dots (25).$$

Supposons que l'on se propose de mener à la courbe une tangente par un point extérieur P, ayant α et β pour ses coordonnées : la question se réduira à déterminer les coordonnées x', y' du point de contact, qui, dans l'équation (25), deviendront des inconnues ; de plus, comme le point de contact est sur la tangente représentée par (25), cette équation doit avoir lieu en changeant x en α, et y en β : elle devient alors

$$(2cx'+e)\alpha+(2ay'+d)\beta+ex'+dy'=0 \ldots\ldots (26),$$

c'est-à-dire,

$$(2c\alpha+e)x'+(2a\beta+d)y'+e\alpha+d\beta=0 \ldots\ldots (27);$$

on aura donc les coordonnées x', y' du point de contact, en combinant cette dernière équation avec l'équation (24), ou, ce qui revient au même, en combinant l'équation (23) avec

$$(2c\alpha+e)x+(2a\beta+d)y+(e\alpha+d\beta)=0 \ldots\ldots (27');$$

ce qui donnera nécessairement deux points de contact. Mais il sera plus facile de construire les lieux géométriques de ces deux équations, lieux dont les intersections seront les points de contact cherchés : or de ces deux lieux, le premier (23) est tout construit, puisque c'est la courbe elle-même; et comme le second (27') est une ligne droite, il s'ensuit que les deux points de contact cherchés devant être en même temps sur la courbe et sur la droite (27'), cette droite ne peut être que celle qui joint les deux points de contact.

Ainsi le sommet P d'un angle circonscrit à une ligne du second degré, étant donné, il est facile de déterminer la droite (27') qui joint les deux points de contact des deux côtés de l'angle avec la courbe.

Le problème inverse, c'est-à-dire, celui qui aurait pour objet de déterminer le sommet P de l'angle circonscrit, par la connaissance de la droite (27') qui passe par les points de

contact, reviendrait à considérer les coordonnées α et β du point P, comme des inconnues dans l'équation (28), et à les déterminer, en exprimant que cette équation est identique avec celle de la droite donnée.

Supposons actuellement que le point P soit variable de position, la droite (27') le sera pareillement ; assujétissons cette droite à passer constamment par un certain point G ayant g et h pour ses coordonnées : nous exprimerons cette circonstance par l'équation

$$(2c\alpha + e)g + (2a\beta + d)h + e\alpha + d\beta = 0,$$

qui revient à celle-ci,

$$(2cg + e)\alpha + (2ah + d)\beta + eg + dh = 0;$$

cette équation, en y changeant α et β en x et y, est celle du lieu de tous les points P qui répondent aux diverses positions que peut prendre la droite autour du point G : l'équation de ce lieu sera donc

$$(2cg + e)x + (2ah + d)y + eg + dh = 0 \ldots (28),$$

qui représente une droite. D'où résulte le théorème premier (*).

(*) On peut appliquer ce qui vient d'être dit à la courbe de l'équation $2y^2 + x^2 + y + x = 0$; le diamètre FH a pour coordonnée $y = -\frac{1}{4}$, les abscisses des intersections de la courbe avec ce diamètre sont $x = -0,5 \pm 0,6$, etc. ; la courbe coupe l'axe des x dans les deux points $x = 0$, $x = -1$, et l'axe des y dans les points $y = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Soient $\alpha = 1$, $\beta = -1$ les coordonnées du point P; comme on a $a = 2$, $e = 1$, $d = 1$, $e = 1$, l'équation (27') deviendra $y = x$; les intersections de cette droite avec la courbe, sont données par $3x^2 + 2x = 0$; d'où $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$; à la première valeur de x répond $y = 0$: avec la seconde on prendra $y = -\frac{2}{3}$: si à chacun de ces points $x = 0$ et $y = 0$, $x = -\frac{2}{3}$ et $y = -\frac{2}{3}$, on mène une tangente, on trouvera pour équation de la première $y = -x$, et pour

De même que le point G étant donné arbitrairement, on peut toujours déterminer une droite qui ait avec lui la relation exprimée par le théorème, on peut réciproquement, lorsque cette droite est donnée, déterminer un point G qui soit lié avec elle par une semblable relation : il ne s'agit, en effet, que de regarder comme inconnues dans l'équation de la droite (28), les coordonnées g et h du point G, et de les déterminer en exprimant que cette droite est identique avec celle de la droite donnée. De là résulte le théorème 2°. qui est l'inverse du premier.

A cause de la relation qui existe entre le point G et la droite qui est le lieu des sommets des angles circonscrits, ce point a été appelé le *pôle* de cette droite, et on peut appeler la droite la *polaire* du point G.

Si dans les équations (23) et (28) on suppose $d=0$, ces équations deviendront

$$\left.\begin{aligned} ay^2+cx^2+ex&=0,\\ (2cg+e)x+2ahy+eg&=0\end{aligned}\right\}\ldots(29):$$

l'axe des x sera un diamètre de la courbe, et l'axe des y, tangent à la courbe, sera une parallèle à son conjugué. Si l'on veut maintenant que la droite, lieu des sommets, soit parallèle à l'axe des y, il faudra que le terme en y disparaisse de l'équation (29) : on devra donc avoir $h=0$; et réciproquement, lorsque h sera nul, quel que soit d'ailleurs g, la droite deviendra parallèle à l'axe des y. De là résultent plusieurs conséquences curieuses que nous laisserons à tirer.

équation de la seconde, $y=-\frac{x}{5}-\frac{4}{5}$; les coordonnées de l'intersection de ces tangentes, seront $x=\alpha=1$, $y=6=-1$. Soient $h=-\frac{1}{4}$, $g=-\frac{1}{4}$ les coordonnées du point G qui est l'intersection de la sécante $y=x$ avec le diamètre FH; en reportant ces valeurs dans l'équation (28), on obtient $x=\alpha=1$; d'où l'on conclut que le lieu des points P est une parallèle à l'axe des y.

84. Nous donnerons sans démonstration, un procédé graphique qui n'exige que la règle, pour mener une tangente à une ligne du second degré, 1°. par un point extérieur P; 2°. par un point P pris sur la courbe.

1°. Soit (fig. 73) ABCD la courbe, et soient menées par le point donné P, extérieur à la courbe, les deux sécantes arbitraires PDA, PCB : soit E le point de concours de AB et DC, et soit F le point de concours de AC et BD; en menant EF qui coupe la courbe en G et H, ces deux points seront ceux de contact de la courbe avec les tangentes par P.

2°. Soient pris arbitrairement les trois points A, B, D (fig. 74) : soient M le point de concours de AB et DP, N le point de concours de AD et BP : en faisant varier la position de l'un ou de l'autre des points B et D, ou des deux à la fois, et répétant la même construction, on obtiendra une nouvelle droite M'N' dont l'intersection R avec la première, sera un des points de la tangente cherchée RP.

85. Théorème II. *Si deux cordes se coupent dans une ligne du second degré, le produit des segmens de l'une est du produit des segmens de l'autre, dans un rapport constant.*

Si l'on divise l'équation générale par le coefficient de y^2, on aura celle-ci

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0,$$

qui ne renferme plus que cinq coefficiens, et que nous écrirons ainsi,

$$y^2 + (ax + c)y + (bx^2 + dx + f) = 0:$$

supposons que la courbe de cette équation (fig. 75) soit rapportée à deux axes AX, AY, faisant entr'eux un angle quelconque donné : pour une abscisse quelconque $x = AP$ dont les coordonnées sont Pm et PM, on a

$$bx^2 + dx + f = Pm \times PM \ldots\ldots (30):$$

or, pour $y=0$, la proposée se réduit à

$$bx^2+dx+f=0=x^2+\frac{d}{b}x+\frac{f}{b},$$

dont les racines sont $x=\mathrm{AB}$, $x=\mathrm{AC}$: on a donc

$$x^2+\frac{d}{b}x+\frac{f}{b}=(x-\mathrm{AB})\,(x-\mathrm{AC})\ldots\ldots(31),$$

et conséquemment,

$$\frac{1}{b}\,\mathrm{P}m\times\mathrm{PM}=(x-\mathrm{AB})\,(x-\mathrm{AC});$$

remettant pour x l'abscisse AP, on obtient cette propriété énoncée,

$$\frac{\mathrm{PB}\times\mathrm{PC}}{\mathrm{P}m\times\mathrm{PM}}=\frac{1}{b}\ldots\ldots(32).$$

Si la courbe est un cercle, on a $b=1$, et on retombe sur la propriété connue des sécantes. De là résultent ces conséquences remarquables.

Si dans la parabole (fig. 76), nous prenons pour axe des abscisses le diamètre FH qui divise également les cordes mm, MM, parallèles à l'axe des y, et qui rencontre la courbe au point a, et en un autre point infiniment éloigné, on aura, d'après (32), ces quotiens constans $\frac{\overline{\mathrm{PM}}^2}{\mathrm{P}a\times\infty}$, $\frac{\overline{pm}^2}{pa\times\infty}$, et de l'égalité de ces rapports, on tire

$$\overline{\mathrm{PM}}^2=\frac{\overline{pm}^2}{pa}\times\mathrm{P}a,$$

c'est-à-dire, en faisant $\mathrm{PM}=y$, $\mathrm{P}a=x$, $\frac{\overline{pm}^2}{pa}=2p'$, cette équation

$$y^2=2p'x\ldots\ldots(33).$$

Dans l'ellipse (fig. 77), le diamètre FH rencontre la courbe en a et a' ; faisant $\mathrm{C}a=\mathrm{C}a'=\mathrm{A}'$, $\mathrm{C}e'=\mathrm{C}e=\mathrm{B}'$, la

propriété (32) deviendra

$$\frac{\overline{PM}^2}{Pa \times Pa'} = \frac{\overline{Ca}^2}{Ca \times Ca'} = \frac{B'^2}{A'^2},$$

d'où l'on déduit

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(2A'x - xx) \ldots . (34),$$

en faisant $PM = y$, $aP = x$. Si, pour porter l'origine au centre, on fait $x = A' - x'$, on aura cette équation aux diamètres conjugués

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(A'^2 - x'^2) \ldots .. (35).$$

Pour l'hyperbole (fig. 78), on a

$$\frac{\overline{PM}^2}{Pa \times Pa'} = \text{const.};$$

on peut toujours supposer cette constante égale au rapport entre un carré B'^2 et celui de $Ca = A'$: conséquemment on aura

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(2A'x + xx) \ldots . (36),$$

en posant $aP = x$: on définira B' en transportant l'origine au centre C de la courbe, ce qui donnera la transformée

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(x'^2 - A'^2) \ldots .. (37);$$

d'où, pour $x' = 0$, on conclura

$$y = \pm B' \sqrt{-1}:$$

ainsi B' est encore le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'ordonnée imaginaire qui répond à $x = 0$.

Il serait aisé de s'assurer, *à priori*, que les axes auxquels nous venons de rapporter les trois courbes, sont des axes ou des diamètres conjugués. Nous observerons d'abord qu'ayant

pris pour l'ellipse et l'hyperbole, l'origine au centre, l'équation générale est réduite à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0;$$

qu'on fasse maintenant les substitutions

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \qquad x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha'$$

qui font passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques, et qu'à l'effet de rapporter la courbe à un système de diamètres conjugués (chap. VIII), on égale à zéro le coefficient du rectangle, on aura la condition

$$2A \sin\alpha \sin\alpha' + 2C \cos\alpha \cos\alpha' + B(\sin\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha' \cos\alpha) = 0;$$

divisant par $\cos\alpha \cos\alpha'$, il viendra

$$2A \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + B \operatorname{tang}\alpha + B \operatorname{tang}\alpha' + 2C = 0.$$

Si maintenant on pose $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{2A}$ qui est la tangente de l'angle que fait le diamètre FH avec l'axe des abscisses (30), [fig. 49], on aura

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2 - 4AC}{0} = \infty:$$

or l'angle α' étant droit, il s'ensuit que l'axe $C'C$ conjugué de FH, est perpendiculaire sur l'axe primitif des abscisses, ou sur sa parallèle passant par le centre. Ainsi le diamètre FH, et la perpendiculaire menée du centre sur l'axe primitif des abscisses sont des axes conjugués. Pour la parabole, $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{0}{0}$.

86. Théorème III. *Toute droite menée par les milieux de cordes parallèles, dans une ligne du second degré, va passer par le centre, si la courbe admet un tel point.*

Reprenons l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0,$$

qui est celle d'une courbe rapportée à son centre (53) : l'équation (4), [chap. VII), se réduit à

$$(2Ca' + B)\,X + (2A + Ba')\,Y = 0,$$

et elle représente une droite passant par le centre ; donc etc.

87. Théorème IV. *Dans la parabole, toutes les droites qui divisent également des cordes parallèles, sont parallèles entre elles, quelle que soit l'inclinaison de ces cordes.*

La même équation (4), [chap. VII] donne

$$-\frac{2Ca' + B}{2A + Ba'}$$

pour tangente de l'angle entre l'axe des abscisses et la droite qui divise également les cordes parallèles : il suffit de prouver que cette expression est indépendante de a' : or, par la division, on trouve, pour la parabole,

$$\frac{2Ca' + B}{Ba' + 2A} = \frac{2C}{B} + \frac{B^2 - 4AC}{B(Ba' + 2A)} = \frac{2C}{B} = \frac{B}{2A},$$

tangente de l'angle que fait avec l'axe des x le diamètre donné par la partie rationnelle des valeurs de y.

88. Théorème V. *Si par le sommet commun de deux courbes semblables dont les grands axes coïncident, on mène à volonté deux cordes* AB, AB' (fig. 79), *ces cordes seront coupées proportionnellement par la courbe intérieure, et conséquemment les cordes* BB', DD' *seront parallèles.*

On appelle *ellipses* ou *hyperboles* semblables, celles pour lesquelles on a $\frac{B^2}{A^2} = \frac{B'^2}{A'^2}$, A et A' étant les demi-grands axes, B et B' les demi-petits axes. Les paraboles sont donc des courbes semblables.

Soient

$$y^2 = mx^2 + nx,$$
$$y^2 = mx^2 + n'x,$$

les équations de deux courbes semblables de même dénomination, et

$$y = ax, \quad y = a'x,$$

celles des deux droites AB, AB′ passant par l'origine A : en les combinant avec chacune des deux premières, on trouve aisément

$$AB = \frac{n}{a^2 - m}\sqrt{a^2+1}, \quad AB' = \frac{n}{a'^2 - m}\sqrt{a'^2+1},$$

$$AD = \frac{n'}{a^2 - m}\sqrt{a^2+1}, \quad AD' = \frac{n'}{a'^2 - m}\sqrt{a'^2+1},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{AB}{AD} = \frac{n}{n'} = \frac{AB'}{AD'}.$$

89. On peut disposer des cinq coefficiens de l'équation

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0 \ldots (38),$$

de manière à assujétir une ligne du second degré à passer par cinq points donnés : or, pour faciliter les déterminations de ces coefficiens, on pourra faire passer chacun des axes coordonnés par deux des cinq points donnés, ce qui fixera la position de ces axes, et conséquemment l'angle qu'ils font entr'eux. Ainsi les cinq points en question étant (fig. 80) A, M′, M″, M‴, M$^{\text{IV}}$, ayant pour coordonnées o, o et y', x'' et y'', x''' et y''', x^{IV} et y^{IV}, l'équation générale (38) deviendra, pour le point A,

$$f = 0 \ldots (39),$$

pour le point M′,

$$y'^2 + cy' + f = 0 \ldots (40),$$

pour le point M″,

$$y''^2 + ax''y'' + bx''^2 + cy'' + dx'' + f = 0 \ldots (41),$$

pour le point M‴,

$$y'''^2 + ax'''y''' + bx'''^2 + cy''' + dx''' + f = 0 \ldots (42),$$

enfin pour le point M^{IV},

$$bx^{IV2} + dx^{IV} + f = 0 \ldots (43).$$

On observera que ces équations (39)....(43) étant du premier degré en a, b, c, d, f, les valeurs de ces inconnues seront réelles et possibles : après les substitutions de ces valeurs dans (38), la courbe de cette équation passera par les cinq points donnés. Si la courbe doit être une parabole, on aura égard à la condition $a^2 - 4b = 0$, qui servira à déterminer l'une des cinq constantes.

90. Nous pouvons donc résoudre les deux problèmes suivans, dont la solution est fondée sur la question précédente et sur l'analyse des tangentes.

Problème I^er^. *Etant donnés les trois points* B, C, E *et la droite* AF, *assujétir une courbe du premier ordre à passer par ces trois points et à toucher la droite* AF *en un point* A *donné* (fig. 81).

L'énoncé comprend cinq conditions qui suffisent pour définir la position de la courbe.

Ayant mené la droite AC par deux des quatre points, et la droite BE par les deux autres, on prendra AC pour axe des abscisses, et pour axe des y une parallèle YY, à BE passant par A, ensorte que le point A sera l'origine des coordonnées. Pour le point A, on a $x = 0$, $y = 0$; pour le point C, $y = 0$, $x = l$; pour B, $x = \mathrm{AH} = g$, $y = \mathrm{HB} = h$; enfin pour le point E, $x = \mathrm{AH} = g$, $y = \mathrm{HE} = -k$. Ainsi l'équation générale

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0$$

donne les quatre conditions suivantes

$$f = 0 \ldots (44),$$

$$bl^2 + dl = 0 \ldots (45),$$

$$h^2 + agh + bg^2 + ch + dg = 0 \ldots (46),$$

$$k^2 - agk + bg^2 - ck + dg = 0 \ldots (47);$$

l'équation (45) donne

$$d = -bl \ldots (48),$$

dont la substitution dans (46) et (47) donne

$$h^2 + agh + bg^2 + ch - blg = 0 \ldots (49),$$
$$k^2 - agk + bg^2 - ck - blg = 0;$$

retranchant la dernière de la précédente, on trouve

$$h^2 - k^2 + ag(h+k) + \overset{c}{\cancel{bl}}(h+k) = 0,$$

dont la division par $h+k$ donne

$$h - k + ag + c = 0 \ldots (50).$$

Multipliant par h, et retranchant le produit de (49), il viendra

$$bg^2 + hk - blg = 0, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{hk}{lg - g^2} = \frac{hk}{g(l-g)}.$$

Ainsi, d'après (48),

$$d = -\frac{lhk}{g(l-g)};$$

et d'après (50)

$$a = \frac{k - c - h}{g}.$$

Il reste à déterminer c, d'après la condition que la courbe touche la droite AF en A. L'équation de AF rapportée à l'origine A et aux axes de la courbe, est

$$y = mx;$$

en observant que $m = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{AH}} = \frac{p}{g}$, p étant HF. Si l'on substitue cette valeur de y dans

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = 0,$$

l'équation résultante donnera les abscisses x des intersections

de la courbe et de la droite, et on aura, après les réductions;

$$x = 0, \quad x = -\frac{(cm + d)}{b + am + m^2}:$$

mais la droite deviendra tangente en A, si le second point d'intersection vient se réunir au point A dont l'abscisse $x = 0$; on posera donc

$$\frac{cm + d}{b + am + m^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad cm + d = 0,$$

et de là on déduit

$$c = -\frac{d}{m} = -\frac{dg}{p} = \frac{lhk}{p(l - g)};$$

ainsi tous les coéfficiens a, b, $c \ldots f$ sont connus, et conséquemment on pourra construire la courbe.

Problème II. *Etant donnés le point* B, *et deux droites* AT, CT, *décrire une courbe qui passe par* B *et qui touche chacune des droites dans les points* A *et* C (fig. 82).

Cet énoncé comprend cinq conditions qui assujétissent la courbe de position. On prendra la ligne AT pour axe des ordonnées et AC pour axe des abscisses. L'équation de AT est

$$x = 0,$$

dont la substitution dans

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0$$

donne

$$y = 0, \quad y = -c;$$

et conséquemment $c = 0$ sera la condition sous laquelle la droite AT touche la courbe en A : l'équation générale devient donc

$$y^2 + axy + bx^2 + dx + f = 0.$$

On a d'ailleurs $f = 0$, parce que le point A est sur la courbe. Soient encore $x = g$, $y = h$ les coordonnées du point B : cette dernière équation deviendra, après la suppression de f,

$$h^2 + agh + bg^2 + dg = 0.$$

De plus, à cause de $x = AC = l$ et $y = 0$, on a la condition

$$bl^2 + dl = 0, \quad \text{d'où} \quad d = -bl.$$

La courbe doit toucher en C la ligne CT qui a pour équation

$$y = -\frac{mx}{l} + m,$$

m désignant la longueur connue AT : écrivant cette valeur dans

$$y^2 + axy + bx^2 + dx = 0,$$

on aura, en remplaçant d par $-bl$, ces deux abscisses des intersections de la courbe et de la droite CT,

$$x = \frac{l(2m^2 + bl^2 - aml) \pm (bl^2 - aml^2)}{2(m^2 - aml + bl^2)}:$$

pour dire que les deux points se réunissent en un seul, il faut poser

$$bl^3 - aml^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{bl}{m},$$

par cette valeur de a, celles de x deviennent égales, et chacune d'elles est

$$x = l = AC.$$

Ainsi tous les coefficiens a, b, c, d, f étant ou pouvant être évalués, on pourra construire la courbe qui satisfait aux conditions énoncées.

91. Proposons-nous maintenant de trouver les intersections d'une courbe du premier ordre avec une droite et avec une autre courbe du premier ordre. Ces intersections étant autant de points communs aux deux lignes qui ne peuvent en admettre plus de quatre, lorsqu'elles sont du second degré, la question conduit à trouver les couples de solutions qui satisfont aux équations proposées, solutions qu'on obtiendra par la méthode connue de l'élimination (Alg., chap. XXV) qu'il sera bon de combiner avec la discussion (chap. IV).

Problème Ier. Trouver les coordonnées des intersections des

lignes

$$y = \frac{a}{b}x, \quad y^2 + ay = x^2 + bx;$$

à cet effet on éliminera x et y entre les deux équations, ce qui donnera

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = -b, \quad y = -a;$$

ainsi la droite rencontrera la courbe dans deux points. Le centre de l'hyperbole a pour coordonnées $x = -\frac{b}{2}$, $y = -\frac{a}{2}$, et comme elles satisfont à l'équation de la droite, il s'ensuit que cette droite passe par le centre de la courbe.

Problème II. Assigner les coordonnées des points communs aux courbes

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 2x = 0,$$
$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0:$$

on trouve qu'elles se coupent dans les points $x = 0$ et $y = 0$; $x = 1$ et $y = 0$.

Problème III. Soit le système des deux équations

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 1 = 0,$$
$$y^2 - 2xy + x^2 + x = 0$$

qui représentent des paraboles. On obtient ces solutions

$$x = -1, \quad y = 0; \quad x = -\tfrac{1}{9}, \quad y = -\tfrac{4}{9},$$

les deux courbes se coupent donc en deux points, etc.

Problème IV. Assigner les coordonnées des intersections de l'ellipse et de la parabole représentées par

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2x = 0,$$
$$y^2 - 2xy + x^2 + x = 0;$$

on a pour système de solutions

$$x = 0, \quad y = 0; \quad x = -1, \quad y = 0;$$

les deux autres racines x données par l'équation finale en x, sont

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-7}.$$

92. Nous dirons un mot de la construction des racines des équations des troisième et quatrième degrés. Le principe de ces constructions consiste à considérer l'équation proposée comme le résultat de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues; ensorte que l'inconnue de l'équation à résoudre, étant regardée comme abscisse, les abscisses des intersections seront les racines de la proposée. Lorsqu'il ne faut employer que le cercle et la ligne droite, la construction est dite *géométrique*; elle est dite *mécanique*, lorsqu'on est obligé de recourir à des courbes que l'on ne peut construire que par points.

Problème I^er^. Construire les racines de l'équation complète du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \ldots (1);$$

si l'on suppose

$$x^2 = ky \ldots (2),$$

y étant une nouvelle inconnue et k une arbitraire, mais constante, l'équation (1) deviendra

$$kxy + pky + qx + r = 0 \ldots (3);$$

l'équation (1) peut donc être regardée comme le résultat de l'élimination de y entre (2) et (3); la première représente une parabole, et la seconde une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes (46). Le coefficient k étant arbitraire, on pourra en disposer de manière à obtenir les courbes les plus faciles à construire, en observant cependant que k ne peut être zéro. Les abscisses des intersections de ces courbes seront les racines de la proposée.

Problème II. Construire l'équation la plus générale du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

on posera encore

$$x^2 = ky \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

et par la substitution de cette valeur de x^2 dans (1), on trouvera

$$k^2y^2 + pkxy + qx^2 + rx + s = 0, \ldots\ldots (3),$$

équation qui sera à une ellipse, à une parabole ou à une hyperbole, suivant qu'on aura

$$p^2 - 4q < 0, \quad = 0, \quad > 0.$$

Si dans (3) on remplace x^2 par ky, on trouvera

$$k^2y^2 + pkxy + qky + rx + s = 0 \ldots\ldots (4),$$

équation à une hyperbole, à moins qu'on ait $p = 0$, auquel cas elle appartiendrait à une parabole : or, on peut toujours faire cette hypothèse, parce qu'il est toujours possible de faire disparaître le second terme d'une équation. En supposant donc $p = 0$, l'équation (3) peut toujours être ramenée à celle d'un cercle en prenant $k^2 = q$: on aurait alors

$$y^2 + x^2 + \frac{r}{q}x + \frac{s}{q} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$y^2 + \left(x + \frac{r}{2q}\right)^2 = \frac{r^2 - 4sq}{4q^2} \ldots\ldots (6),$$

équation d'un cercle dont le centre et le rayon sont connus. Donc la résolution de la proposée ne dépendra que de la construction d'une parabole et d'un cercle.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce genre de constructions actuellement plus curieuses qu'utiles : d'ailleurs, les méthodes numériques pour la résolution des équations, au point où elles sont portées aujourd'hui, doivent être employées de préférence, parce qu'elles donnent toujours une précision à laquelle les opérations graphiques ne peuvent atteindre.

CHAPITRE X.

Des équations du cercle, et de quelques propriétés de cette courbe.

93. SOIENT (fig. 83) AX, AY deux axes rectangulaires auxquels on rapporte la position des points du cercle, x et y les coordonnées AP, PM d'un point quelconque M, $x' = AP'$, $y' = P'C$ celles du centre C donné de position : en désignant par r le rayon connu du cercle, on a pour tout point M de la circonférence

$$r^2 = \overline{pM}^2 + \overline{pC}^2 = (MP - CP')^2 + (AP - AP')^2,$$

et, conséquemment,

$$r^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2,$$

et en développant,

$$y^2 + x^2 - 2y'y - 2x'x + y'^2 + x'^2 - r^2 = 0 \ldots (1),$$

équation qui rentre dans l'équation générale du second degré entre deux variables, sous les hypothèses $A = C$, $B = 0$ (35).

Soit $x' = r$ ou $CQ = CR$: l'axe des y touchera le cercle au point R, et l'équation (1) prendra cette forme plus simple,

$$y^2 + x^2 - 2y'y - 2rx + y'^2 = 0 \ldots\ldots (2).$$

Si l'on suppose en même temps $y' = r$, c'est-à-dire, $CP' = CR'$, l'axe AX sera aussi tangent au cercle en R', et on aura pour équation

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2rx + r^2 = 0 \ldots\ldots (3).$$

Mais si l'axe AY étant toujours tangent en R, l'axe AX passe par le centre, alors $y'=0$, et l'équation (2) prend la forme

$$y^2+x^2-2rx=0\ldots\ldots(4).$$

Enfin, si les deux axes passent par le centre, on a en même temps $x'=0$, $y'=0$, et l'équation (1) se réduit à cette forme très-simple,

$$y^2+x^2=r^2\ldots\ldots\ldots(5),$$

qui suppose l'origine des coordonnées au centre de la courbe.

De l'équation générale du cercle

$$y^2+x^2+ay+bx+c=0,$$

on déduit cette conséquence, que *par trois points non en ligne droite, on peut faire passer une circonférence de cercle, et qu'on n'en peut faire passer qu'une.*

En effet, en désignant par x' et y', x'' et y'', x''' et y''' les coordonnées de chacun de ces trois points, on a ces trois équations de condition

$$y'^2+x'^2+ay'+bx'+c=0,$$
$$y''^2+x''^2+ay''+bx''+c=0,$$
$$y'''^2+x'''^2+ay'''+bx'''+c=0,$$

desquelles on ne peut conclure qu'un seul système de valeurs de a, b, c.

94. Nous passerons à la solution de quelques questions.

Problème I. *Un point étant donné de position à l'égard de deux axes perpendiculaires entr'eux, assigner le lieu des centres de tous les cercles assujétis à passer par ce point, et à être tangens à l'un des axes* (fig. 84).

Soient x', y' les coordonnées du point M donné, x et y les coordonnées variables du centre, et r le rayon : il s'agit de trouver la relation entre x et y qui satisfait à l'énoncé

Le cercle en question a pour équation

$$(y'-y)^2+(x'-x)^2=r^2;$$

et il s'agit de déterminer le rayon r, encore inconnu, d'après la condition que le cercle touche l'axe AY, condition satisfaite par $r=x$: l'équation précédente devient donc

$$y^2-2y'y-2x'x+y'^2+x'^2=0:$$

c'est-à-dire, celle d'une parabole lieu des centres des cercles qui jouissent de la propriété énoncée.

Lorsque l'axe des abscisses passe par le point donné, on a $y'=0$, et la dernière équation se simplifie et devient

$$y^2-2x'x+x'^2=0.$$

Pour $y=0$, on a

$$x=\frac{x'}{2}=\text{A'S};$$

si donc on suppose

$$x=\frac{x'}{2}+\text{X}=\text{A'S}+\text{SP},$$

on trouvera cette transformée,

$$y^2=2x'\text{X},$$

qui suppose l'origine au sommet de la parabole qui est en S. Pour $\text{X}=\frac{x'}{2}=\text{SM}$, on a $y=\pm x'$: prenant donc $\text{MR}=\text{MR}'=x'$, les points R et R' seront à la parabole.

Problème II. *Trouver le lieu des intersections successives de deux droites assujéties à passer chacune par un point donné et à se rencontrer sous un angle donné et constant* (fig. 85).

Pour simplifier ses calculs, sans altérer cependant la généralité de la solution, faisons passer l'axe des abscisses par les deux points donnés, A et C, et l'axe des ordonnées par le point A. L'équation de AM sera

$$y=ax\ldots(1),$$

et celle de CM,

$$y = a'(x - x')\ldots\ldots\ldots(2),$$

x' étant l'abscisse du point C. Désignant par m la tangente de l'angle donné AMC, on aura

$$m = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{a' - m}{1 + ma'}:$$

si l'on substitue cette valeur de a dans l'équation (1), elle deviendra

$$y = \frac{a' - m}{1 + ma'}\,x\ldots\ldots(3).$$

Ainsi au lieu des deux quantités a et a' variables avec les positions des deux droites, il ne reste plus dans les équations (2) et (3), que la seule variable a' : il faut maintenant trouver la relation entre les coordonnées du point d'intersection M, pour toutes les positions des deux droites, sous la condition que la tangente m soit constante ; c'est ce qu'on obtient par l'élimination de a' entre (2) et (3), puisque, par cette élimination, on dit que les coordonnées x et y sont les mêmes dans les deux équations, et sont conséquemment relatives à un point commun aux deux droites ; d'ailleurs en rendant le résultat indépendant de a', on le fait convenir à toutes les valeurs de cette quantité, et conséquemment à toutes les positions des deux droites. Nous développons ici ce principe calcul, à cause des nombreuses applications qu'il trouvera par la suite. On obtient ainsi l'équation

$$y^2 + x^2 - x'x - \frac{x'y}{m} = 0.$$

Lorsque l'angle entre les deux lignes est droit, $m = \infty$, et l'équation précédente devient

$$y^2 + x^2 - x'x = 0:$$

ces deux équations sont celles d'un cercle, comme on le savait d'avance.

Problème III. *Étant donnés tant de points qu'on voudra A', A'', A''', etc., trouver un point M tel que la somme des carrés de ses distances à chacun des points donnés, soit un carré donné, et trouver le lieu des points tels que M* (fig. 86).

Supposons, pour simplifier les calculs, que les points donnés soient au nombre de trois, restriction qui ne diminue en rien la généralité de la solution. Désignons par x' et y', x'' et y'', x''' et y''', x et y les coordonnés des points A', A'', A''' et M. En notant par q^2 la somme des carrés des distances, on aura l'équation

$$y^2+x^2-\tfrac{2}{3}(y'+y''+y''')y-\tfrac{2}{3}(x'+x''+x''')x$$
$$=\frac{q^2-[x'^2+x''^2+x'''^2+y'^2+y''^2+y'''^2]}{3}.$$

Si pour simplifier cette équation, on fait

$$x=\mathrm{X}+\frac{x'+x''+x'''}{3},\quad y=\mathrm{Y}+\frac{y'+y''+y'''}{3},$$

on aura pour transformée

$$\mathrm{Y}^2+\mathrm{X}^2=\mathrm{R}^2.$$

Ainsi le lieu des points M, est la circonférence d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon.

Théorème I. *Trois cercles inégaux étant donnés de grandeur et de position sur un plan, si en les considérant deux à deux, on leur mène une tangente extérieure prolongée jusqu'à la ligne des deux centres, les trois points de rencontre seront en ligne droite* (fig. 87).

Nous prendrons le centre A pour origine des coordonnées, pour axe des abscisses la ligne qui passe par deux des trois centres, par A et C, par exemple, laquelle rencontrera en R

les deux tangentes extérieures aux cercles A et C. R″ et R′ étant les points de rencontre avec les lignes des centres BC et BA de chaque système de deux tangentes extérieures aux cercles B et C, B et A, tout se réduit à faire voir que la ligne R′R″ va passer par R. Posons, à cet effet,

$$AB = m,\quad BC = n,\quad AC = p,\quad AR' = l',\quad CR'' = l'',$$
$$BAR = \alpha,\quad BCR = \alpha';$$

les coordonnées des points R′ et R″, savoir,

$$AM' = -x',\quad M'R' = -y',\quad AM'' = x'',\quad M''R'' = -y'',$$

et soient r, r', r'' les rayons des cercles B, A et C. On sait que l'équation de la droite R′R″, assujétie à passer par les points $-x'$ et $-y'$, $-x''$ et $-y''$, est (chap. II),

$$y + y' = \frac{y' - y''}{x' + x''}(x + x') \ldots .(1).$$

Pour avoir l'abscisse du point R de rencontre de cette droite avec l'axe AX, on fera $y = 0$ dans (1), ce qui donnera

$$x = \frac{x''y' + x'y''}{y' - y''} \ldots . .(2):$$

or,

$$x' = l'\cos\alpha,\ y' = l'\sin\alpha,\ x'' = p + CM'' = p - l''\cos\alpha',\ y'' = l''\sin\alpha':$$

faisant ces substitutions dans (2), on trouve

$$x = \frac{l'l''(\sin\alpha'\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha') + pl'\sin\alpha}{l'\sin\alpha - l''\sin\alpha'} \ldots \ldots . .(3).$$

Or si du centre B on abaisse la perpendiculaire BH sur la base AC du triangle ABC, on aura

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n}{m},\quad \cos\alpha = \frac{AH}{m},\quad \cos\alpha' = -\frac{CH}{n},$$

et l'expression (3) deviendra

$$x = \frac{(l'l'' + nl')p}{l'n - l''m} \ldots . .(4),$$

en observant que AH + CH $= p$. Mais on a vu, en géométrie, que

$$l' = \text{AR}' = \frac{mr'}{r - r'}, \quad l'' = \text{CR}'' = \frac{nr''}{r - r''};$$

donc l'expression (4) devient

$$x = \text{AR} = \frac{pr'}{r' - r''},$$

et retranchant p de part et d'autre pour avoir CR, on trouve

$$\text{CR} = \frac{pr''}{r' - r''} \ldots\ldots (5),$$

ce qui est effectivement la distance du centre C au point de concours de la ligne des centres AC et de la tangente TT'; donc, etc. Cette proposition a été démontrée dans *les Réciproques*, par le seul secours de la géométrie.

Supposons $r' = r''$, alors la distance AR est infinie; d'où l'on conclut que la droite qui joint les centres des cercles égaux, est parallèle à la droite R'R'' qui passe par les points de concours des tangentes aux cercles inégaux, considérés deux à deux, proposition curieuse et qu'on peut démontrer directement.

Théorème II. *Si aux trois mêmes cercles, pris deux à deux, on mène des tangentes alternes, comme* tt', *ces tangentes rencontreront les lignes des centres en des points* a', b', c', *et on a ces propriétés*, 1°. *les points* c', a', R; a', b', R'; c', b', R'' *sont en ligne droite :* 2°. *les droites* Aa', Bb', Cc' *se croisent en un point unique* (fig. 87).

1°. Il suffira de démontrer la première proposition à l'égard des trois points c', a', R.

Soient x', y' les coordonnées de c', x''; y'' celles de a' rapportées au point A comme origine : on aura pour l'équation de la droite passant par les points x' et y', x'' et y'',

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Pour avoir l'abscisse du point dans lequel cette droite coupe l'axe AR, on fera $y = 0$, et on trouvera

$$x = \frac{y'x'' - x'y''}{y' - y''} \ldots\ldots (1);$$

or, dans le triangle $Ac'd$, on a

$$Ad = x' = Ac'.\cos\alpha, \quad c'd = y' = Ac'\sin\alpha,$$

menons les rayons Bk, Ak' aux points de contact k, k'; les triangles semblables $Ak'c'$, $Bc'k$ donneront

$$Ac' = \frac{mr'}{r+r'},$$

en conservant les dénominations du théorème précédent; donc

$$x' = \frac{mr'}{r+r'}\cos\alpha, \quad y' = \frac{mr'}{r+r'}\sin\alpha;$$

on trouve pareillement

$$x'' = p + \frac{nr''}{r+r''}\cos\alpha', \quad y'' = \frac{nr''}{r+r''}\sin\alpha', \quad Ca' = \frac{nr''}{r+r''}.$$

Soient, pour abréger, $\lambda' = \dfrac{mr'}{r+r'}$, $\lambda'' = \dfrac{nr''}{r+r''}$: on aura

$$x' = \lambda'\cos\alpha, \quad y' = \lambda'\sin\alpha, \quad x'' = p + \lambda''\cos\alpha', \quad y'' = \lambda''\sin\alpha',$$

et la substitution de ces valeurs dans (1) donne

$$x = \frac{-\lambda'\lambda''(\sin\alpha'\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha') + p\lambda'\sin\alpha}{\lambda'\sin\alpha - \lambda''\sin\alpha'}$$

$$= \frac{-\lambda'\lambda''\left(\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cos\alpha'\right) + p\lambda'\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}}{\lambda'\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \lambda''}$$

$$= \frac{p(n\lambda' - \lambda'\lambda'')}{\lambda'n - \lambda''m},$$

en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, par leurs valeurs trouvées

dans le théorème précédent. Qu'on remette dans cette dernière expression, pour λ' et λ'' les valeurs que ces lettres représentent, et on aura enfin

$$x = \frac{pr'}{r'-r''}.$$

même abscisse que celle du point R dans le théorème précédent.

2°. Si l'on désigne toujours par x', y' les coordonnées du point c', par x'', y'' celles du point a', par x''' l'abscisse Ab', et par x^{iv} et y^{iv} celles du point B, on aura pour équation de Cc',

$$y = \frac{-y'}{p-x'}(x-p);$$

pour équation de Aa',

$$y = \frac{y''}{x''}x:$$

pour équation de Bb',

$$y = -\frac{y^{\text{iv}}}{x'''-x^{\text{iv}}}(x-x''');$$

on tire de ces équations ces deux valeurs de x, savoir,

$$x = \frac{px''y'}{y''(p-x')+x''y'}, \quad x = \frac{x''x'''y^{\text{iv}}}{y''(x'''-x^{\text{iv}})+x''y^{\text{iv}}};$$

dont il s'agit de prouver l'égalité : à cet effet, on remplacera dans les seconds membres x', y', x'', y'' par leurs valeurs en λ', λ'', sin α, cos α, sin α', cos α', et p trouvées plus haut, x''' quantité analogue à Ac', par $\frac{pr'}{r'+r''}$, x^{iv} et y^{iv} par m cos α et m sin α; puis, après les réductions, on énoncera λ', λ'', sin α, cos α, sin α', cos α', au moyen des distances des centres et des rayons, et alors on reconnaîtra l'identité des résultats.

Problème IV. *Soit un polygone régulier d'un nombre* n *de côtés; on propose de trouver dans le plan de ce polygone un point tel, que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du polygone, soit constante.*

Désignons par C_1, C_2, $C_3 \ldots C_n$ les côtés consécutifs du polygone régulier, par le centre menons au côté C_1, par exemple, une parallèle que nous prendrons pour l'axe des abscisses, le centre étant l'origine des coordonnées; par le point donné concevons des parallèles aux côtés consécutifs C_1, $C_2 \ldots C_n$, parallèles que nous indiquerons par c_1, c_2, $c_3 \ldots c_n$, et par le centre des perpendiculaires à ces parallèles que nous désignerons par P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$. Si l'angle au centre du polygone, est a, angle qui est le même que celui de deux perpendiculaires menées du centre à deux côtés consécutifs, les angles entre les perpendiculaires P_1 et P_2, P_1 et P_3, P_1 et P_4, P_1 et P_n seront a, $2a$, $3a \ldots$: or l'équation d'une droite, étant (24)

$$d = y \sin \alpha + x \cos \alpha,$$

où α représente l'angle entre la perpendiculaire d menée de l'origine sur la droite et l'axe des abscisses, il faudra pour rapporter cet angle à l'axe des y, lequel est dirigé suivant la perpendiculaire P_1, remplacer α par son complément; et alors l'équation ci-dessus devient

$$d' = y \cos \alpha + x \sin \alpha;$$

x et y étant les coordonnées des points cherchés qui jouissent de la même propriété que le point xy.

Maintenant pour avoir les expressions des perpendiculaires successives P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$, menées du centre sur les parallèles c_1, c_2, $c_3 \ldots c_n$, il faudra, dans l'équation précédente, changer α en o, a, $2a \ldots (n-1)a$, d en $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$, et x et y dans les coordonnées x et y du point donné: ensorte que

$$P_1 = y, \quad P_2 = y \cos a + x \sin a,$$
$$P_3 = y \cos 2a + x \sin 2a$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{n-1} = y \cos (n-1)a + x \sin (n-1)a$$

sont les plus courtes distances du centre aux parallèles c_1, c_2, etc. Maintenant il est clair qu'en désignant par r la dis-

tance du centre aux côtés du polygone, les différences $r - P_1$, $r - P_2$, $r - P_3$, etc. seront les distances du point x, y à ces côtés, et, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$(r-P_1)^2+(r-P_2)^2+(r-P_3)^2+\ldots+(r-P_n)^2=R^2 \ldots (1),$$

R étant une ligne donnée. Or dans le développement du premier membre, le coefficient de r^2 est n : celui de $2ry$ est

$$-[1+\cos a+\cos 2a+\cos 2a+\ldots+\cos(n-1)a];$$

celui de $2rx$ est

$$-[\sin a+\sin 2a+\ldots+\sin(n-1)a];$$

celui de y^2 est

$$1+\cos^2 a+\cos^2 2a+\ldots+\cos^2(n-1)a;$$

celui de xy est

$$\sin 2a+\sin 4a+\ldots+\sin 2(n-1)a;$$

celui de x^2 est

$$\sin^2 a+\sin^2 2a+\ldots+\sin^2(n-1)a.$$

D'abord il est facile de traduire les coefficiens de y^2 et de x^2 en cosinus d'arcs multiples : à cet effet, on partira de ces formules connues

$$2\cos^2 a=1+\cos 2a, \quad 2\sin^2 a=1-\cos 2a;$$

d'où

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2},$$

par ces substitutions les coefficiens de y^2 et de x^2 deviendront

$$\frac{n}{2}+\frac{1+\cos 2a+\cos 4a+\ldots+\cos 2(n-1)a}{2},$$

$$\frac{n}{2}-\frac{1+\cos 2a+\cos 4a+\ldots+\cos 2(n-1)a}{2}.$$

Si l'on pose

$$S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na$$
$$S' = 1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na,$$

on aura

$$S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a \sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}, \quad S' = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a \cos\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a} \ (*).$$

Ces formules en y changeant n en $n-1$ et conséquemment $n+1$ en n, serviront à évaluer les coefficiens de $2ry$ et de $2rx$, et par les mêmes changemens et celui de a en $2a$, elles donneront les coefficiens de y^2, xy et x^2.

(*) On a

$$\begin{aligned} S &= \sin a\,[1 + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a] \\ &\quad + \cos a\,[\quad \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a] \\ &= \sin a\,(S' - \cos na) + \cos a\,(S - \sin na), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &= 1 + \cos a\,[1 + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a] \\ &\qquad - \sin a\,[\quad \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a], \\ &= 1 + \cos a\,(S' - \cos na) - \sin a\,(S - \sin na), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$S = \sin a\,(S' - \cos na) + \cos a\,(S - \sin na),$$
$$S' = 1 + \cos a\,(S' - \cos na) - \sin a\,(S - \sin na),$$

équations dont il s'agit de tirer S et S'. La seconde donne

$$S'(1 - \cos a) = -S \sin a + 1 - \cos a \cos na + \sin a \sin na,$$

d'où

$$S'\left(2\sin^2\frac{1}{2}\ \right) = -2S\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a + 1 - \cos(n+1)a;$$

or,

$$1 - \cos(n+1)a = 1 - \cos\frac{2(n+1)a}{2} = 2\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)a;$$

donc

L'équation (1) devient donc

$$nr^2-2r\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)a\cos\left(\frac{n-1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}y-2r\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)a\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}x$$
$$+\left\{\frac{n}{2}+\frac{\sin na\cos(n-1)a}{2\sin a}\right\}y^2+\frac{\sin na\sin(n-1)a}{\sin a}xy$$
$$+\left\{\frac{n}{2}-\frac{\sin na\cos(n-1)a}{2\sin a}\right\}x^2=R^2\ldots(2);$$

$$S'\sin^2\frac{1}{2}a+S\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a=\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)a;$$

et enfin,

$$S'\sin\frac{1}{2}a+S\cos\frac{1}{2}a=\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}\ldots(1).$$

De la première, on tire facilement

$$S'\cos\frac{1}{2}a-S\sin\frac{1}{2}a=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}\ldots(2).$$

Multipliant (1) par $\sin\frac{1}{2}a$, et (2) par $\cos\frac{1}{2}a$, et ajoutant, on obtient

$$S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\left[\sin\frac{1}{2}a\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a+\cos\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a\right]}{\sin\frac{1}{2}a},$$

et conséquemment,

$$S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\cos\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Par un calcul analogue, on obtiendrait

$$S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Si l'on pose

$$S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na$$
$$S' = 1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na,$$

on aura

$$S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a \sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}, \quad S' = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a \cos\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a} \text{ (*)}.$$

Ces formules en y changeant n en $n-1$ et conséquemment $n+1$ en n, serviront à évaluer les coefficiens de $2ry$ et de $2rx$, et par les mêmes changemens et celui de a en $2a$, elles donneront les coefficiens de y^2, xy et x^2.

(*) On a

$$\begin{aligned} S &= \sin a\,[1 + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a] \\ &+ \cos a\,[\phantom{1+{}} \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a] \\ &= \sin a\,(S' - \cos na) + \cos a\,(S - \sin na), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &= 1 + \cos a\,[1 + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a] \\ &\quad - \sin a\,[\phantom{1+{}} \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a], \\ &= 1 + \cos a\,(S' - \cos na) - \sin a\,(S - \sin na), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$S = \sin a\,(S' - \cos na) + \cos a\,(S - \sin na),$$
$$S' = 1 + \cos a\,(S' - \cos na) - \sin a\,(S - \sin na),$$

équations dont il s'agit de tirer S et S'. La seconde donne

$$S'(1 - \cos a) = -S \sin a + 1 - \cos a \cos na + \sin a \sin na,$$

d'où

$$S'\left(2\sin^2\frac{1}{2}\right) = -2S\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a + 1 - \cos(n+1)a;$$

or,

$$1 - \cos(n+1)a = 1 - \cos\frac{2(n+1)a}{2} = 2\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)a;$$

donc

L'équation (1) devient donc

$$nr^2-2r\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)a\cos\left(\frac{n-1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}y-2r\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)a\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}x$$
$$+\left\{\frac{n}{2}+\frac{\sin na\cos(n-1)a}{2\sin a}\right\}y^2+\frac{\sin na\sin(n-1)a}{\sin a}xy$$
$$+\left\{\frac{n}{2}-\frac{\sin na\cos(n-1)a}{2\sin a}\right\}x^2=\mathrm{R}^2\ldots(2);$$

$$S'\sin^2\frac{1}{2}a+S\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a=\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)a;$$

et enfin,

$$S'\sin\frac{1}{2}a+S\cos\frac{1}{2}a=\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}\ldots(1).$$

De la première, on tire facilement

$$S'\cos\frac{1}{2}a-S\sin\frac{1}{2}a=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}\ldots(2).$$

Multipliant (1) par $\sin\frac{1}{2}a$, et (2) par $\cos\frac{1}{2}a$, et ajoutant, on obtient

$$S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\left[\sin\frac{1}{2}a\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a+\cos\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a\right]}{\sin\frac{1}{2}a},$$

et conséquemment,

$$S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\cos\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Par un calcul analogue, on obtiendrait

$$S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)a\sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

comme diamètre, on décrit une circonférence, 1°. *celle qui est décrite sur le grand axe, sera extérieure à l'ellipse, et la touchera aux deux extrémités de ce grand axe*: 2°. *la seconde sera intérieure, et touchera l'ellipse aux deux extrémités du petit axe* (fig. 89)...

Nous supposerons l'axe $2A > 2B$. 1°. La première circonférence aura pour équation

$$Y^2 = A^2 - x^2,$$

ensorte que l'équation de l'ellipse étant

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

on aura, pour la même abscisse,

$$\frac{y^2}{Y^2} = \frac{B^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{Y} = \frac{B}{A}:$$

et à cause de $B < A$, on conclura $y < Y$ ou $PM < Pm$: ainsi tous les points de cette circonférence seront extérieurs à l'ellipse. 2°. la seconde circonférence, en prenant les y pour abscisses, et conséquemment les x pour ordonnées, aura pour équation

$$X^2 = B^2 - y^2;$$

et celle de l'ellipse résolue par rapport à x^2, sera

$$x^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^4 - y^2);$$

donc, pour la même abscisse y, on aura

$$\frac{x^2}{X^2} = \frac{A^2}{B^2}, \quad \text{d'où} \quad x > X, \quad \text{ou} \quad QN > Qn:$$

ainsi les points de l'ellipse seront extérieurs à la seconde circonférence.

98. Problème I^er^. *Une ellipse étant tracée sur un plan, trouver* 1°. *les deux axes*; 2°. *le centre* (fig. 90).

1°. Il résulte de l'équation de l'ellipse rapportée au centre et aux axes, que, pour deux abscisses CP, CP' égales et de signes contraires, on a quatre ordonnées PM, Pm, P'M', P'm' égales et deux à deux de signes contraires : donc CM$=$CM'$=$C$m'$$=Cm$; donc la circonférence décrite du centre C avec un rayon égale à la distance du centre à l'un des points M de l'ellipse entre A et B, coupera la courbe en quatre points M, M', m', m; ensorte que les perpendiculaires menées de C aux deux cordes Mm, MM', étant prolongées jusqu'à l'ellipse, seront les axes cherchés : 2°. cette question a été résolue (86).

99. Théorème III. *Le produit des tangentes trigonométriques des angles faits avec le grand axe et dans le même sens, par des cordes menées des deux extrémités de cet axe, à tout point de l'ellipse, est constant, et égal à* $-\frac{B^2}{A^2}$ (fig. 91).

La droite menée par A, a pour équation

$$y = a(x - A);$$

la droite menée par A' a pour équation

$$y = a'(x + A),$$

a et a' étant les tangentes trigonométriques des angles MAX, MA'X; on tire de ces équations

$$a = \frac{y}{x - A}, \quad a' = \frac{y}{x + A},$$

le produit de ces tangentes est

$$aa' = \frac{y^2}{x^2 - A^2};$$

et il n'est tel qu'autant que les deux droites se coupent, puisque, dans la multiplication, on a regardé les coordonnées x et y de chaque droite, comme étant les mêmes, ensorte qu'elles ne sont plus relatives qu'à leur intersection. Mais ce point doit être sur la courbe; donc ses coordonnées doivent

satisfaire à son équation

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) = -\frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2),$$

d'où

$$\frac{y^2}{x^2 - A^2} = -\frac{B^2}{A^2};$$

conséquemment

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2} \ldots (1),$$

ce qui est la propriété annoncée. En passant au cercle, $B = A$; et cette propriété devient

$$\alpha\alpha' + 1 = 0,$$

ce qui annonce que, dans le cercle, les cordes AM, A'M sont perpendiculaires l'une à l'autre.

On conclut encore de la relation (1) que des deux angles qu'on considère, l'un est aigu et l'autre obtus.

100. Théorème IV. *Tout angle inscrit à l'ellipse et qui s'appuie sur le grand axe, est obtus. Tout angle inscrit à l'ellipse et qui s'appuie sur le petit axe, est aigu* (fig. 92).

1°. AmA' étant une demi-circonférence décrite sur le grand axe AA' d'une ellipse, l'angle AmA' est droit, et conséquemment l'angle AMA' est obtus (97).

2°. BnB' étant une demi-circonférence décrite sur le petit axe de l'ellipse, l'angle BnB' est droit, et conséquemment l'angle BNB' est aigu (*idem*).

101. Théorème V. 1°. *De tous les angles inscrits à l'ellipse et qui s'appuient sur le grand axe, le plus grand est celui qui a son sommet à l'extrémité du second axe.* 2°. *De tous les angles inscrits à l'ellipse, et qui s'appuient sur le petit axe, le plus petit est celui qui a son sommet à l'extrémité du grand axe:* 3°. *L'angle* maximum *a pour supplément l'angle* minimum (fig. 93).

1°. L'équation de la ligne AM, est

$$y = \alpha(x - A), \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{y}{x - A} = \text{tang MAX};$$

celle de A'M est

$$y = \alpha'(x + \mathrm{A}), \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \frac{y}{x + \mathrm{A}} = \text{tang MA'X};$$

mais

$$\text{tang AMA'} = \text{tang V} = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{\dfrac{y}{x - \mathrm{A}} - \dfrac{y}{x + \mathrm{A}}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2 - \mathrm{A}^2}},$$

et, après les réductions,

$$\text{tang V} = \frac{2\mathrm{A}y}{y^2 + x^4 - \mathrm{A}^2}.$$

On a déjà dit que les lignes se coupent, et il reste à exprimer qu'elles se coupent sur l'ellipse : à cet effet on portera dans tang V la valeur de y tirée de l'équation de l'ellipse

$$y^2 = \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}(\mathrm{A}^2 - x^2),$$

et on trouvera

$$\text{tang V} = -\frac{2\mathrm{AB}}{(\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{\mathrm{A}^2}}}.$$

Le signe — qui affecte la tangente, démontre que l'angle A'MA est obtus, ce que l'on savait déjà par le théorème IV : mais au plus grand de deux angles obtus, correspond la plus petite tangente numérique, laquelle est donnée par la plus grande valeur du dénominateur, c'est-à-dire, par celle qui répond à $x = 0$, abscisse pour laquelle

$$\text{tang V} = -\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2} \ldots\ldots (1);$$

pour cette abscisse, le sommet M tombe en B, ou à l'extrémité du petit axe. En effet, si l'on mène les deux cordes AB, A'B, on a

$$\text{tang A'BA} = \frac{2\,\text{tang CBA}}{1 - \text{tang}^2\,\text{CBA}};$$

mais $\tang \mathrm{CBA} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, donc

$$\tang \mathrm{A'BA} = \frac{\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}{1 - \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}} = -\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}.$$

Cette expression est celle de la tangente entre les deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse (67) : d'où on peut conclure que *les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, sont respectivement parallèles aux cordes menées des deux extrémités du grand axe à l'extrémité du petit.*

2°. En imitant la même analyse pour le second axe, on trouve que

$$\tang \mathrm{V}' = \frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2} \ldots (2)$$

est la tangente du plus petit des angles à l'ellipse qui s'appuient sur cet axe, et que ce plus petit angle est celui qui a son sommet à l'extrémité du grand axe.

3°. Les deux tangentes (1) et (2) ne différant que par le signe, on en conclut que les deux angles sont supplémens l'un de l'autre.

102. Problème II. *Trouver l'équation de la courbe dont la somme des distances de chacun des points à deux points fixes donnés dans le plan de la courbe, soit constante et égale à une ligne donnée* 2A (fig. 94).

Soient F et F′ les deux points fixes donnés ; joignons ces points par une droite qui sera l'axe des abscisses, et prenons pour origine le milieu C de la distance FF′; portons de chaque côté de C des longueurs $\mathrm{CA} = \mathrm{CA}' = \mathrm{A}$, et soient $+c$ et $-c$ les abscisses des points F et F′, x et y les coordonnées CP, PM d'un point M dont la somme des distances $\mathrm{FM} = z$, $\mathrm{F'M} = z'$, satisfait à la condition énoncée. On a

$$z + z' = 2\mathrm{A} \ldots\ldots (1);$$

mais

$$(2)\ldots z^2=(x-c)^2+y^2, \qquad z'^2=(x+c)^2+y^2\ldots(3),$$

équations qui serviront à traduire z et z' en x et y, valeurs qu'on reportera dans (1). De quelque manière enfin qu'on élimine z et z' entre ces trois équations, la résultante exprimera une relation entre x, y et les données A et c. En retranchant (3) de (2), on obtient

$$z'^2-z^2=(z'+z)(z'-z)=4cx=2A(z'-z),$$

d'après (1). On a donc en même temps

$$z'+z=2A, \qquad z'-z=\frac{2cx}{A},$$

d'où

$$z'=A+\frac{cx}{A}, \qquad z=A-\frac{cx}{A}\ldots(4);$$

reportant ces valeurs dans la somme des équations (2) et (3),

$$z'^2+z^2=2y^2+(x+c)^2+(x-c)^2$$

qu'on n'a pas employée, il viendra

$$A^2(y^2+x^2)-c^2x^2=A^2(A^2-c^2)\ldots(5).$$

Il est clair qu'il peut exister sur l'axe des y un point tel que B, satisfaisant à l'énoncé, puisque, pour ce point, $z=A$, à cause de $z'=z$: aussi pour $x=0$, l'équation (5) donne-t-elle

$$A^2y^2=A^2(A^2-c^2), \quad \text{d'où} \quad y^2=A^2-c^2,$$

ordonnée réelle que nous appellerons B : on a donc

$$c^2=A^2-B^2\ldots\ldots(6);$$

reportant cette détermination dans l'équation (5), on trouve, après les réductions,

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2\ldots\ldots(7).$$

Tous les points de l'ellipse sont donc tels, que la somme de

leurs distances aux deux points F et F', est constamment égale au grand axe 2A. Ces points qu'on nomme les *foyers* de l'ellipse, ont pour abscisses, d'après (6),

$$c = \pm \sqrt{A^2 - B^2} \ldots (8),$$

ensorte qu'il n'existe de foyers que sur le grand axe. Substituant cette valeur de c dans les expressions (4), on a

$$z' = A + \frac{x\sqrt{A^2 - B^2}}{A}, \quad z = A - \frac{x\sqrt{A^2 - B^2}}{A};$$

ces distances z et z' se nomment *rayons vecteurs*. On observera que les valeurs de z et z' sont rationnelles au moyen de l'abscisse x; c'est même d'après cette condition que quelques auteurs ont déterminé les foyers.

103. Problème III. *Enoncer l'équation de l'ellipse au moyen du paramètre, ou de la double ordonnée passant par le foyer.*

Pour trouver l'ordonnée qui répond au foyer, on supposera

$$x = A - c = A - \sqrt{A^2 - B^2}$$

dans l'équation

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2),$$

qui est celle de l'ellipse au sommet, et on trouvera

$$y = \frac{B^2}{A} = p,$$

troisième proportionnelle au demi-grand axe et au demi-petit axe : ainsi,

$$\frac{2p}{2A} = \frac{B^2}{A^2};$$

on a donc ces équations de l'ellipse

$$y^2 = \frac{p}{A}(A^2 - x^2), \quad y^2 = \frac{p}{A}(2Ax - x^2).$$

104. Problème IV. *De la description de l'ellipse* (fig. 94).

1°. De l'un des foyers, et avec une distance plus petite que le grand axe, ayant décrit un arc, on le coupera par un second arc décrit de l'autre foyer, avec un rayon égal à la portion restante du grand axe : tous les points obtenus de cette manière appartiendront à l'ellipse, puisque, pour chacun d'eux, la somme des distances aux foyers sera égale au grand axe.

Les grandes ellipses peuvent être décrites par le mouvement continu d'un piquet ou d'un style qui tend un cordeau égal en longueur au grand axe, et dont les extrémités sont fixées aux foyers, parce qu'encore la somme des distances du point décrivant aux deux foyers, est constante.

2°. On peut employer le procédé suivant, très-commode dans la pratique, lorsqu'il s'agit de petites ellipses. On donne les deux demi-axes d'une ellipse, et conséquemment leur différence A'G (fig. 95), en supposant $A > B$: ayant placé, par exemple, les points A' et G en F et K, on les fera mouvoir de manière qu'ils restent constamment sur les côtés CB', CA, et que le prolongement KM soit $= B$; alors le point M sera à l'ellipse. En effet,

$$\overline{PM}^2 = B^2 - (x - CK)^2 :$$

or, les triangles semblables CFK, KPM donnent

$$CK : FK :: KP : KM, \quad \text{d'où} \quad CK = \frac{(A - B)x}{A},$$

et par la substitution de la valeur de CK dans celle de $\overline{PM}^2 = y^2$, on obtient

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2).$$

En répétant cette construction dans chacun des quatre angles droits autour de C, on décrit les quatre quarts de l'ellipse.

3°. La propriété suivante donne lieu à la construction d'un

instrument fort simple, au moyen duquel on décrit l'ellipse d'un mouvement continu.

Problème V. *Soit une règle* KG, *si l'on joint l'origine* A *à un point* M, *et qu'on fasse glisser le point* K *de* K *en* A, *sur l'axe* AX, *le point* G *restant sur* AY, *le point* M *décrira la circonférence* BMC, *et un point* N *de cette droite, décrira une ellipse* (fig. 96).

Faisons $MN = a'$, prenons $AM = MK = a$, ce qui suppose l'angle $MAK = MKA$: soient $AP = X$, $PM = Y$, $Ap = x$, $pN = y$; on aura pour tous les points de la circonférence décrite par M,

$$X^2 + Y^2 = a^2 \ldots\ldots (1):$$

mais les triangles semblables NpK, MPK donnent

$$\frac{Np}{NK} = \frac{MP}{MK} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{a'+a} = \frac{Y}{a},$$

d'où

$$Y = \frac{ay}{a'+a} \ldots\ldots (2).$$

On a aussi ces rapports

$$\frac{KP}{KM} = \frac{AP}{AM} = \frac{Mn}{MN} \quad \text{ou} \quad \frac{X}{a} = \frac{X - x}{a'},$$

d'où

$$X = \frac{ax}{a - a'} \ldots (3).$$

Substituant ces valeurs de X et Y dans (1), on trouve

$$y^2 + \frac{(a + a')^2}{(a - a')^2} x^2 = (a + a')^2 \ldots (4).$$

Si dans cette équation, on fait $y = 0$, on aura l'abscisse x du point d'intersection de la courbe avec l'axe AX, laquelle sera

$$x = a - a' = B,$$

et pour $x = 0$, on trouvera

$$y = a + a' = \mathrm{A},$$

parce que nous désignons toujours le demi-grand axe par A, et le demi-petit axe par B : on observera que, pour la réalité de B, il faut qu'on ait $a' < a$, ou MN < MK : on a donc

$$(5) \ldots \; a = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}, \quad a' = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} \ldots (6),$$

et l'équation de la courbe énoncée en A et B, sera

$$\mathrm{B}^2y^2 + \mathrm{A}^2x^2 = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.$$

Il suit de là que si deux axes 2A et 2B d'une ellipse sont donnés, on déduira de (5) et (6) les longueurs a et a', telles que le point M décrivant un arc de cercle, le point N décrira l'ellipse représentée par l'équation.

4°. Aux extrémités A et A′ du grand axe (fig. 97) on élevera les perpendiculaires AG = AF, A′L = A′F, F étant l'un des foyers ; par les points G et L ainsi déterminés, on mènera LG qui rencontrera en R le prolongement du grand axe ; par des points P, P, P, etc., pris comme l'on voudra sur le grand axe, on élevera les perpendiculaires PD terminées à la droite RL ; du point F, comme centre, avec chacune des lignes PD, comme rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont les perpendiculaires PD en des points M qui seront à l'ellipse. En effet, l'origine des coordonnées étant au centre de la courbe, et les abscisses des foyers F et F′ étant $+c$ et $-c$, les coordonnées du point G, sont

$$x = \mathrm{A}, \quad y = \mathrm{A} - c,$$

et celles du point L sont

$$x = -\mathrm{A}, \quad y = \mathrm{A} + c :$$

ainsi l'équation de la droite RL assujétie à passer par les

deux points G et L, sera

$$y-(A-c)=\frac{(A-c)-(A+c)}{2A}(x-A),$$

ou, après les réductions,

$$y=A-\frac{cx}{A},$$

expression d'une ordonnée quelconque PD; et, pour la même abscisse x, la distance du foyer au point correspondant de l'ellipse, est $z=A-\frac{cx}{A}$ (102) : ce qui démontre la construction.

Mais si sur la tangente GA prolongée, on prend $Al=A'L$, et si sur le prolongement de LA′ on prend $A'g=AG$, et qu'on mène lg qui rencontre l'axe prolongé en r, il est aisé de voir qu'au moyen du foyer F′ et de la perpendiculaire Pd, on achevera l'ellipse.

Il résulte encore de cette construction que les points M et m sont à l'ellipse. En effet, les droites Gl et gL sont égales et parallèles; ensorte que la figure lGLg est un parallélogramme : de plus, à cause de $AG=AF$, $Al=A'L=A'F$, on a

$$AG+Al=AF+A'F=AA':$$

chaque point M est éloigné du fóyer F d'une quantité PD, et parce qu'il peut encore être déterminé, en coupant chaque ligne PD par un arc de cercle décrit de F′, comme centre, avec le prolongement Pd, comme rayon, on a

$$MF+MF'=PD+Pd=lG=AA'=2A.$$

On remarquera que les lignes RL, rl sont tangentes à l'ellipse aux extrémités T et t des ordonnées qui passent par les foyers.

105. *Des équations de la tangente et de la normale, et des expressions de la soutangente et de la sounormale de l'ellipse* (fig. 98).

Si dans les équations (14) et (16) et dans les expressions (13), (15) et (17) trouvées (82), on fait $N = B^2$, $M = A^2$ à l'effet de les faire convenir à l'ellipse de l'équation générale

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

on trouvera 1°. pour l'équation de la tangente

$$y - y' = -\frac{B^2x'}{A^2y'}(x - x')\dots\dots(1);$$

2°. pour l'équation de la normale

$$y - y' = \frac{A^2y'}{B^2x'}(x - x')\dots\dots\dots(2);$$

3°. pour l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle entre la tangente et l'axe

$$a = -\frac{B^2x'}{A^2y'}\dots\dots(3);$$

4°. pour l'expression de la soutangente

$$\text{soutang} = \frac{A^2y'^2}{B^2x'} = \frac{(A^2 - x'^2)}{x'}\dots\dots(4),$$

en remplaçant y'^2 par sa valeur $\frac{B^2}{A^2}(A^2 - x'^2)$ tirée de l'équation de la courbe satisfaite par les coordonnées x', y'. Le demi-grand axe CA est donc une moyenne proportionnelle entre CP et CT.

5°. La soutangente pour le second axe, est *pt* qu'on obtiendra par la comparaison des triangles semblables *tp*M', M'PT qui donnent

$$tp = \frac{PM' \times pM'}{PT} = \frac{y'x'^2}{A^2 - x'^2} = \frac{B^2 - y'^2}{y'};$$

6°. L'expression de la sounormale est

$$\text{sounorm} = -\frac{B^2x'}{A^2}\dots\dots(5).$$

Si l'on réduit l'équation de la tangente en multipliant par A^2y', et si l'on remplace $A^2y'^2 + B^2x'^2$ par A^2B^2, parce que le point x', y' est sur l'ellipse, on aura cette équation de la tangente

$$A^2y'y + B^2x'x = A^2B^2 \ldots .(6)$$

très-facile à retenir, en remarquant qu'elle devient celle de l'ellipse, en y faisant $y = y'$, $x = x'$.

Reprenons la soutangente.

$$\mathrm{TP} = \frac{A^2 - x'^2}{x'}:$$

cette expression étant indépendante du second axe, reste donc la même pour $B = A$; ainsi l'ellipse et le cercle décrit sur son grand axe, ont même soutangente pour une même abscisse. De là résultè un procédé fort simple pour mener une tangente à l'ellipse par un point M′ donné sur cette courbe (fig. 98); on mènera l'ordonnée PM′ de ce point, prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en m, et la tangente en m perpendiculaire à l'extrémité du rayon Cm; joignant alors les points T et M′, la droite TM′ sera la tangente cherchée.

En partant de l'expression (3)

$$a = -\frac{B^2x'}{A^2y'},$$

on trouve $a = \infty$ pour $y' = 0$; l'ellipse tombe donc en A et A′ perpendiculairement sur le grand axe, parce qu'en considérant la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés dont chacun est infiniment petit, la tangente peut être regardée comme le prolongement de l'un de ces élémens. Pour $x' = 0$, le point de tangence est à l'extrémité du second axe, $a = 0$, donc la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. On peut mettre la valeur de a sous la forme

$$a = \frac{-B^2x'}{\frac{A^2B}{A}\sqrt{(A^2 - x'^2)}} = -\frac{B}{A\sqrt{\frac{A^2}{x'^2} - 1}} \ldots .(7).$$

Or x' diminuant depuis $x'=A$ jusqu'à $x'=0$, le dénominateur de a augmente, la fraction diminue, l'inclinaison des élémens correspondans de l'ellipse sur l'axe des abscisses, va donc en diminuant depuis le sommet de la courbe jusqu'à l'extrémité du second axe. On remarquera que la tangente a est négative pour des abscisses x' positives, et positive pour des abscisses x' négatives : ce qui doit être puisque, dans le premier cas, les angles de la tangente avec le grand axe, sont obtus, tandis que, dans le second, ils sont aigus.

On trouvera facilement que les coordonnées du point pour lequel $a=1$, sont

$$x'=\pm\frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad y'=\pm\frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

lesquelles, pour le cercle et dans l'hypothèse $A=1$, deviennent

$$x'=y'=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

qui sont alors le cosinus et le sinus de l'angle de 50°.

De l'expression (5) de la sounormale

$$PN=-\frac{B^2x'}{A^2},$$

on déduit (fig. 98)

$$CN=CP-PN=x'-\frac{B^2}{A^2}x'=\frac{A^2-B^2}{A^2}x'\ldots.(8);$$

en observant que, dans la traduction de la différence $CP-PN$, on doit employer la valeur de la sounormale, abstraction faite du signe qui la précède, puisque ce signe ne fait qu'indiquer le sens dans lequel on doit porter cette sounormale, à partir du pied de l'ordonnée, sens toujours contraire à celui de l'abscisse x' qui se compte du centre de la courbe. Pour $x'=A$, on a la plus grande valeur de CN, savoir

$$CN=\frac{A^2-B^2}{A}=\frac{\overline{CF}^2}{CA}=\frac{CF}{CA}.CF;$$

donc à cause de $CF < AC$, on a $CN < CF$, ce qui montre que l'extrémité de la normale au point A, tombe entre le foyer et le centre; et d'ailleurs, de l'expression de la sounormale (5), considérée abstraction faite du signe, on tire pour $x' = A$,

$$AN = \frac{B^2}{A};$$

la longueur AN est donc égale à la moitié du paramètre (103). Pour $x' = 0$, on trouve $CN = 0$: donc, pour tous les points entre A et B, la normale coupe toujours le grand axe entre le centre et un point situé à une distance de ce centre, égale au demi-paramètre, point placé entre le centre et le foyer.

106. Problème VI. *Mener une tangente à l'ellipse en un point donné sur la courbe* (fig. 99).

La droite menée par le centre et le point de tangence $x'y'$, a pour équation

$$y = \frac{y'}{x'}x, \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{y'}{x'} \ldots\ldots(1),$$

et l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses, a pour tangente

$$a = -\frac{B^2}{A^2}\frac{x'}{y'} \ldots\ldots(2);$$

multipliant l'une par l'autre les égalités (1) et (2), on a cette relation

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots(3);$$

mais on sait déjà (99) que les tangentes trigonométriques α, α' des angles de deux cordes supplémentaires telles que AN, A'N, satisfont à la relation

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots(4);$$

donc si la corde AN est parallèle au demi-diamètre CM',

auquel cas $\alpha' = a'$, on aura, d'après (3) et (4), $\alpha = a$, et la corde AN sera parallèle à la tangente M'T.

De là résulte cette construction très-simple pour mener une tangente à l'ellipse, en un point donné : *on mènera le demi-diamètre du point de tangence, puis de l'extrémité du grand axe, opposée au point de tangence, une corde parallèle à ce demi-diamètre, la corde supplémentaire, et par le point de tangence une parallèle à cette dernière, laquelle sera la tangente cherchée.*

Corollaire I. Si l'on rapproche la relation (3) trouvée (64), des relations (3) et (4) obtenues plus haut, en observant que a, a', α, α' sont des tangentes, on en conclura que le conjugué du demi-diamètre CM', est une parallèle CN' à la tangente en M'. Ainsi, étant donné un diamètre, on saura trouver son conjugué.

Corollaire II. Mais si sur la ligne $CT = n.2A$, comme grand axe, et sur le même multiple $n.2B$ du second axe, on construit une ellipse, elle passera nécessairement par M', puisque, pour les cordes menées de C et T en M', on a la relation

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Si par le centre C' de la seconde ellipse, on mène une parallèle C'M'' à CM', puis par M'' une tangente M''T', le point M'' sera sur une troisième ellipse ayant des axes proportionnels à ceux de la seconde. Toutes les tangentes aux intersections consécutives de ces ellipses, sont parallèles.

107. Nous avons supposé, 1°. que si deux droites menées des extrémités du grand axe de l'ellipse, satisfont par leurs tangentes trigonométriques à la relation

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2},$$

elles se couperont en un point de l'ellipse; 2°. que si l'on a

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2},$$

α' étant la tangente de l'angle fait avec le grand axe par le demi-diamètre mené au point de tangence, a sera celle de l'inclinaison de la tangente sur le même axe.

1°. L'équation de l'une des droites étant

$$y = \alpha(x - A),$$

et celle de l'autre,

$$y = \alpha'(x + A) = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\alpha}(x + A),$$

à cause de $\alpha' = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\alpha}$, leur produit donnera

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2):$$

donc les coordonnées de l'intersection des deux droites satisfont à l'équation de l'ellipse, et conséquemment, cette intersection sera sur la courbe.

2°. On a

$$a' = \frac{y'}{x'}, \quad \text{d'où} \quad a = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{1}{a'} = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x'}{y'},$$

et conséquemment, l'équation de la droite assujétie à passer par le point de tangence x', y', et à faire avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente soit $= a$, sera

$$y - y' = -\frac{B^2}{A^2} \frac{x'}{y'}(x - x'),$$

et, après la réduction,

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2y'y + B^2x'x = A^2B^2,$$

équation de la tangente au point x', y' (105), en observant de plus que le point x', y' est sur la courbe.

108. Problème VII. *Enoncer l'équation de l'ellipse au moyen des coordonnées polaires* (fig. 100).

Aux données d'une abscisse et de l'ordonnée correspondante, on peut substituer celles d'un rayon vecteur et de l'angle qu'il fait avec une parallèle à l'axe des abscisses, menée par le pôle fixe de ces rayons.

Soient p et q les coordonnées CD, DE du pôle E des rayons vecteurs EM, φ l'angle de EM avec une parallèle Ea à l'axe AA', $x = CP$, $y = PM$, les coordonnées rectangulaires du point M : on a trouvé [chap. II], (25), ces relations

$$x = p + z\cos\varphi,\quad y = q + z\sin\varphi;$$

ces valeurs portées dans l'équation de la courbe

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$$

donnent

$$\left.\begin{array}{r} A^2\sin^2\varphi \\ +\ B^2\cos^2\varphi \end{array}\right| zz + \left.\begin{array}{r} 2qA^2\sin\varphi \\ +\ 2pB^2\cos\varphi \end{array}\right| z + \left.\begin{array}{r} q^2A^2 \\ +\ p^2B^2 \\ -\ A^2B^2 \end{array}\right| = 0 \ldots\ldots (1).$$

Les hypothèses $p = 0$, $q = 0$ portent le pôle E au centre C de la courbe, et donnent

$$z = \frac{AB}{\sqrt{A^2\sin^2\varphi + B^2\cos^2\varphi}},$$

expression qu'on peut conclure de celles qui ont été trouvées (63). Pour $A = B$, on trouve $z = A$ pour toutes les valeurs de φ, ce qui doit arriver, parce qu'alors l'ellipse se change dans un cercle.

On observe qu'en égalant à zéro le terme tout connu de l'équation (1), on porte le pôle sur l'un des points de l'ellipse, puisque ce terme tout connu n'est que l'équation de l'ellipse, en y changeant x en p et y en q. Si de plus on dit que les deux valeurs correspondantes de z sont nulles, le rayon vecteur sera tangent à la courbe, et la valeur correspondante de φ sera celle d'une tangente avec l'axe, en un point p, q de la courbe. On trouve ainsi

$$\tan\varphi = -\frac{B^2}{A^2}\frac{x'}{y'},$$

en changeant p en x' et q en y' : c'est en effet l'expression (3) trouvée (105).

Si dans (1) on fait $q = 0$, $p = c = \sqrt{A^2 - B^2}$, ce qui revient à porter le pôle à l'un des foyers F, on trouve, après

les réductions,

$$Az = \pm (cz \cos\varphi - B^2),$$

d'où l'on tire, à cause du double signe,

$$z = -\frac{B^2}{A - c\cos\varphi}, \quad z = \frac{B^2}{A + c\cos\varphi};$$

or comme c est $< A$, et $\cos\varphi < 1$, la première valeur de z est toujours négative et se rapporte à la demi-ellipse inférieure A′B′A, tandis que la seconde se rapporte à la demi-ellipse supérieure.

On observera que, pour les valeurs de φ, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, le rayon vecteur

$$z = \frac{B^2}{A + c\cos\varphi}$$

donne la demi-ellipse supérieure. On nomme *excentricité* la distance c du centre au foyer de l'ellipse.

Corollaire I. Si dans l'expression

$$z = A - \frac{cx}{A},$$

trouvée (102), on remplace x par sa valeur $c + z\cos\varphi$, le pôle étant au foyer F, on trouvera

$$z = \frac{A(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi},$$

en représentant, pour abréger, $\frac{c}{A}$ par e.

Corollaire II. Menons par le foyer F (fig. 100) et sous un angle quelconque θ avec le grand axe, une droite aa', et soit u l'angle entre le rayon vecteur FM et aa', on aura $\varphi = u - \theta$; et par la substitution de cette valeur de φ dans l'expression de z (corollaire I), on trouvera

$$\frac{1}{z} = \frac{1 + e\cos(u - \theta)}{A(1 - e^2)}.$$

109. **Théorème VI.** *Le lieu des extrémités des soutangentes polaires de l'ellipse, est une ligne droite perpendiculaire au grand axe* (fig. 101).

F étant un foyer de l'ellipse, si par F on mène une perpendiculaire Fr au rayon vecteur FM$'$, et une tangente en ce point jusqu'à la rencontre en r, la ligne Fr est la soutangente polaire de l'ellipse.

En prenant l'origine au centre C de la courbe, et désignant par x', y' les coordonnées du point de tangence M$'$, on a pour équation de FM$'$

$$y = \frac{-y'}{c-x'}(x-c);$$

l'équation de la droite menée par F perpendiculairement à FM$'$, est donc

$$y = \frac{c-x'}{y'}(x-c)\ldots\ldots(1):$$

pour avoir les coordonnées du point de rencontre de Fr avec la tangente M$'r$, il faut porter la valeur y tirée de (1) dans l'équation de la tangente à l'ellipse

$$A^2y'y + B^2x'x = A^2B^2\ldots\ldots(2):$$

après cette substitution et les réductions, on trouve

$$x = \text{CR} = \frac{A^2}{c} = \frac{A^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\ldots\ldots(3),$$

expression indépendante des coordonnées du point M$'$, et de laquelle on conclut que l'abscisse du point r, est indépendante de la position du point de tangence M$'$, ensorte que le lieu des points r, pour toutes les positions de M$'$, est la droite SR perpendiculaire au grand axe et fixée de position par l'abscisse CR. Pour porter l'origine au foyer F, il faut faire

$$x = c + X, \qquad \text{d'où} \qquad X = x - c;$$

donc

$$X = \frac{A^2}{\sqrt{A^2-B^2}} - c = \frac{B^2}{\sqrt{A^2-B^2}},$$

et en introduisant le paramètre $p = \frac{B^2}{A}$, on trouve

$$X = \frac{p}{\sqrt{1 - \frac{p}{A}}} \ldots\ldots (4).$$

Cette propriété que je n'ai vue démontrée que dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. *Dubourguet*, y est déduite d'une analyse que nous n'avons pu employer ici, et à laquelle j'ai substitué la précédente qui est très-simple : elle a lieu, comme nous le verrons, dans l'hyperbole et dans la parabole. Nous appellerons la ligne SR *directrice* de l'ellipse.

110. Théorème VII. *Les deux rayons vecteurs menés au point de tangence, font avec la partie de cette tangente, située du même côté, des angles égaux* (fig. 102).

En désignant toujours par c l'abscisse du foyer, par x', y' les coordonnées du point M' de tangence, et par α, a et V les tangentes des angles M'FX, M'TX, FM'T, on sait que

$$\alpha = \frac{y'}{x' - c}, \qquad a = -\frac{B^2}{A^2}\frac{x'}{y'}$$

et $$V = \frac{a - \alpha}{1 + a\alpha} = \frac{A^2y'^2 + B^2x'^2 - B^2cx'}{A^2cy' - (A^2 - B^2)x'y'}:$$

mais le point M' étant sur l'ellipse, on a

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2,$$

et d'ailleurs,

$$c^2 = A^2 - B^2;$$

donc

$$V = \frac{A^2B^2 - B^2cx'}{A^2cy' - c^2x'y'} = \frac{B^2(A^2 - cx')}{cy'(A^2 - cx')} = \frac{B^2}{cy'} \ldots\ldots (1).$$

Or en passant du foyer F au foyer F', et cherchant à calculer la tangente V' de l'angle F'M'T, il ne peut y avoir de différence que dans le signe de c qui devient $-c$; ainsi en changeant dans (1) c en $-c$, on a

$$V' = -\frac{B^2}{cy'} \ldots (1).$$

Ces deux tangentes V et V′ étant égales et de signes contraires, les angles FM′T, F′M′T sont supplémens l'un de l'autre : on a donc

$$FM'T + F'M'T = \pi;$$

mais d'ailleurs

$$F'M'T + F'M't = \pi:$$

donc $FM'T = F'M't$.

Corollaire Ier. *La normale* M′N *divise en deux parties égales l'angle* F′M′F *des deux rayons vecteurs.*

Corollaire II. De cette propriété on déduit une construction graphique très-simple *pour mener une tangente à l'ellipse*, 1°. *par un point donné sur cette courbe*, 2°. *par un point extérieur.*

1°. On mènera (fig. 103) les rayons vecteurs F′M′, FM′ au point M′ de tangence, on prolongera le plus grand F′M′ d'une quantité $M'K = FM'$; joignant K et F, la ligne M′T perpendiculaire à FK, sera la tangente cherchée.

En effet, l'angle $FM'T = TM'K = tM'F'$; on est donc ramené à l'égalité des angles de chacun des rayons vecteurs avec les portions M′T, M′t de la droite tT qui est conséquemment tangente en M′.

On peut encore s'assurer que la droite tT ainsi déterminée n'a que le point M′ commun avec la courbe; car pour tout autre point t de cette ligne, aussi près qu'on voudra de M′, on a toujours

$$F't + tK > F'K > F'M' + M'F > 2A;$$

donc le point t ne peut être sur l'ellipse, et il ne peut être intérieur à la courbe.

2°. Soit t (fig. 104) le point duquel on doit mener une tangente à l'ellipse. Du point F′, comme centre, avec un rayon égal au grand axe 2A, on décrira un arc de cercle; du point donné t, comme centre, avec un rayon égal à tF, on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en K; menant F′K, le point M′ d'intersection sera celui de tangence, et joignant M′ et t, la droite M′t sera la tangente demandée.

En effet, d'après la construction, $tF = tK$; de plus

$$F'M' + M'K = 2A, \quad F'M' + M'F = 2A; \quad \text{donc} \quad M'K = M'F;$$

conséquemment les points t et M' sont à des distances égales tF et tK, $M'F$ et $M'K$ des points F et K; la ligne tM' est donc perpendiculaire sur le milieu de FK, et les angles $FM'T$, $F'M't$ sont égaux; donc la droite tM' est tangente. Cette construction n'exige pas que l'ellipse soit tracée, mais seulement qu'on ait ses axes. On observera que les arcs décrits des points F' et t se coupent en un autre point K' qui, joint à F', donne un second point M'' de tangence, et une seconde tangente $tM''T'$. [Voyez les solutions (84)].

Il serait nécessaire et facile de prouver que, pour tout point, situé soit intérieurement, soit extérieurement à l'ellipse, la somme des distances aux foyers est plus petite ou plus grande que le grand axe.

Corollaire III. On sait qu'un corps élastique qui vient frapper un plan dans une direction oblique, se réfléchit, en faisant l'angle de réflexion, égal à celui d'incidence; et que les rayons lumineux, sonores et calorifiques, sont composés de corpuscules élastiques. Donc si l'on suppose que l'un de ces rayons parte de l'un des foyers de l'ellipse, et vienne frapper un point de cette courbe, ou la tangente en ce point, il ira se réfléchir à l'autre foyer; ensorte que si l'un de ces foyers est le centre d'un faisceau de rayons lumineux, sonores ou calorifiques, tous ceux qui iront frapper les points de l'ellipse, se réuniront à l'autre foyer : c'est de cette belle propriété que les foyers ont tiré leur nom.

111. Problème VIII. *Si l'on mène à tous les points d'une ellipse des tangentes, et que de l'un des foyers on abaisse une perpendiculaire sur chacune d'elles, on propose de trouver le lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

L'équation de la tangente en un point x', y' de l'ellipse, est

$$A^2y'y + B^2x'x = A^2B^2;$$

l'équation de la perpendiculaire menée du foyer sur la tangente, est

$$A^2y'x - B^2x'y = A^2cy';$$

éliminant x', y' au moyen de ces équations et de celle de l'ellipse rapportée au point x', y', on obtient cette relation

$$(y^2+x^2-cx)^2-A^2(x^2-2cx+c^2)-B^2y^2=0,$$

qui revient à la suivante,

$$\begin{aligned} y^4 + (2x^2-2cx-B^2)\,y^2 \\ +(x^4-2cx^3-B^2x^2+2A^2cx-A^2c^2)=0, \end{aligned}$$

ou à celle-ci,

$$y^4+(2x^2-2cx-B^2)\,y^2+(x^2-A^2)(x-c)^2=0:$$

en résolvant cette équation par rapport à y^2, on trouve que la quantité sous le radical, est le carré de $2cx+B^2-2A^2$; d'où l'on conclut

$$y=\pm\sqrt{\left[\frac{-2x^2+2cx+B^2\pm(2cx+B^2-2A^2)}{2}\right]};$$

c'est-à-dire, en tenant compte du double signe sous le radical,

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{[-2x^2+4cx-2c^2]}, \\ y &= \pm\sqrt{-x^2+A^2}, \end{aligned}$$

auxquelles répondent ces équations

$$y^2+(x-c)^2=0, \quad y^2+x^2=A^2,$$

dont la première donne le foyer, et la seconde représente un cercle décrit du centre de l'ellipse avec le demi-grand axe pour rayon : ce cercle est le lieu des points cherchés; et en effet, nous trouverons (115) que les pieds des perpendiculaires abaissés des foyers sur une tangente en un point quelconque de l'ellipse, sont sur la circonférence du cercle circonscrite à l'ellipse; l'autre facteur $y^2+(x-c)^2=0$, rend l'hypothèse que les perpendiculaires sont menées du

foyer, et le système des deux équations donne les coordonnées des deux extrémités de chaque perpendiculaire.

112. Théorème VIII. *Le rectangle de l'ordonnée du point de tangence par l'ordonnée de la tangente qui passe par le centre de l'ellipse, est égal au carré du demi-second axe* (fig. 105).

On a trouvé (105), $tp = \frac{B^2 - y'^2}{y'}$; conséquemment,

$$Ct = \frac{B^2 - y'^2}{y'} + y' = \frac{B^2}{y'};$$

de là on déduit

$$\frac{B^2}{y'} \times y' = Ct \times P'M' = B^2.$$

113. Théorème IX. *Le rectangle de la normale par la perpendiculaire menée du centre sur la tangente, est égal au carré du demi-second axe* (fig. 105).

Menant la normale M'N, et la perpendiculaire CQ sur la tangente, les triangles rectangles P'M'N, QCt semblables, donneront la proportion

$$M'P' : M'N :: CQ : Ct;$$

or (112)

$$M'P' \times Ct = B^2;$$

donc aussi,

$$M'N \times CQ = B^2.$$

114. Théorème X. *Le rectangle des perpendiculaires aux extrémités du grand axe, prolongées jusqu'à la tangente, est égal au carré de l'ordonnée* (fig. 105).

En remplaçant x par $+A$ et par $-A$ dans l'équation de la tangente, les ordonnées y correspondantes sont Am, $A'm'$ dont le produit est $= B^2$.

115. Théorème XI. *Le produit des perpendiculaires* FH, F'H', *menées de chacun des foyers de l'ellipse sur une tangente à cette courbe, est constant et égal au carré du demi-second axe.*

Nous démontrerons cette proposition par l'analyse et par la géométrie.

1°. Nous avons trouvé (chap. II, probl. V) cette expression de la plus courte distance d'un point donné à une droite donnée

$$D = \frac{y'' - ax'' - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

en désignant par x'', y'' les coordonnées du point donné. Ici la droite donnée étant la tangente au point M′ dont les coordonnées sont x', y', on a

$$a = -\frac{B^2}{A^2}\frac{x'}{y'},$$

et b comme ordonnée CR (fig. 106) de la tangente au point $x=0$, est $\frac{B^2}{y'}$, qu'on obtient en faisant $x=0$ dans l'équation de la tangente

$$A^2y'y + B^2x'x = A^2B^2:$$

d'ailleurs pour le foyer F, $y''=0$, $x''=c$, et pour le foyer F′, $y''=0$, $x''=-c$: donc

$$FH = \frac{\frac{B^2cx'}{A^2y'} - \frac{B^2}{y'}}{\sqrt{1 + \frac{B^4x'^2}{A^4y'^2}}} = + \frac{B^2(cx' - A^2)}{\sqrt{A^4y'^2 + B^4x'^2}};$$

$$F'H' = -\frac{\frac{B^2cx'}{A^2y'} - \frac{B^2}{y'}}{\sqrt{1 + \frac{B^4x'^2}{A^4y'^2}}} = -\frac{B^2(cx' + A^2)}{\sqrt{A^4y'^2 + B^4x'^2}},$$

et conséquemment,

$$FH \times F'H' = B^2.$$

2°. Soit décrit (fig. 107) sur le grand axe AA′ de l'ellipse, comme diamètre, une circonférence ANA′ ; je dis que cette cir-

conférence passe par les points H et H′, ce qui revient à prouver que G étant le milieu du grand axe, les lignes CH, CH′ sont égales entr'elles. Soit prolongé le rayon vecteur FM′ jusqu'à la rencontre en R′ de la perpendiculaire F′H′. Le triangle R′M′H′ est égal au triangle H′F′M′, à cause de l'angle R′M′H′ $=$ H′M′F′, d'un angle droit dans chaque triangle, et du côté commun M′H′; donc M′R′ $=$ M′F′, et ajoutant de part et d'autre M′F, on aura FR′ $= 2A$. Or la ligne H′C divisant les côtés F′F et F′R′ en parties égales, est la moitié de FR′; donc H′C $=$ A : on démontrerait de la même manière que CH $=$ A. Donc, etc. Cela posé, si l'on prolonge la ligne HC jusqu'à la rencontre de la circonférence en h, et qu'on mène $F'h$, les triangles FHC, $F'hC$ seront égaux, à cause de CF $=$ CF′, CH $= Ch$, et de l'angle HCF $= h$CF′; donc $F'h$ est égale et parallèle à FH; et comme F′H′ est aussi parallèle à FH, il s'ensuit que la ligne $H'F'h$ est droite. Les deux cordes A′A, $H'h$ qui se coupent dans un cercle, donnent

$$H'F' \times F'h = A'F' \times F'A = H'F' \times FH;$$

mais

$$A'F' \times F'A = (A - c)(A + c) = A^2 - c^2 = B^2;$$

donc, etc.

Corollaire. Les triangles FM′H, F′M′H′ sont semblables, à cause des angles égaux que les rayons vecteurs font avec la tangente (110) et d'un angle droit de part et d'autre, et ces triangles donnent

$$FH : F'H' :: FM' : F'M';$$

mais $F'H' = \frac{B^2}{FH}$, donc

$$\overline{FH}^2 : B^2 :: FM' : F'M',$$

propriété utile dans l'astronomie.

116. Problème VIII. *Etant donnés les axes d'une ellipse,*

trouver un système de diamètres conjugués faisant entr'eux un angle donné (fig. 108).

On décrira sur le grand axe, un arc de cercle capable ~~d'un~~ de l'angle donné, par le point où cet arc coupera l'ellipse, on mènera aux deux extrémités du grand axe, deux cordes, lesquelles, ainsi qu'on l'a démontré (106), seront respectivement parallèles aux diamètres cherchés. Cet angle entre les diamètres conjugués est donc toujours obtus, comme égal à un angle inscrit qui s'appuie sur le grand axe (100), et le problème n'est possible que dans ce cas. Nous allons traduire cette construction en analyse.

Soient LAX l'angle entre les deux diamètres, R le centre, RA le rayon de la circonférence $Adnbn'cA'$ capable de l'angle donné, $Ad'nBn'c'A$ l'ellipse, Ll une tangente en A à la circonférence. Désignant tang LAX par a, on aura pour équation de Ll,

$$y = a\,(x - A);$$

l'équation de la perpendiculaire AR à AL, sera

$$y = -\frac{1}{a}(x - A)\ldots.(1);$$

l'ordonnée CR du point R où cette ligne coupe le second axe, point qui est le centre de la circonférence cherchée ayant AR pour rayon, s'obtient en faisant $x = 0$ dans (1), ce qui donne

$$y = \frac{A}{a} = y'\ldots.(2);$$

l'équation du cercle décrit du centre R avec le rayon AR, est donc

$$\left(y - \frac{A}{a}\right)^2 + x^2 = \overline{RA}^2 = A^2 + \frac{A^2}{a^2};$$

et, après les réductions,

$$y^2 - \frac{2A}{a}\,y + x^2 = A^2\ldots.(3).$$

Il s'agit de trouver les coordonnées des intersections de ce cercle avec l'ellipse

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \ldots\ldots (4).$$

A cet effet, nous prendrons la valeur de x^2 dans (3) pour la substituer dans (4) qui deviendra

$$(A^2 - B^2)\,y^2 + \frac{2B^2A}{a}\,y = 0 \ldots\ldots (5);$$

d'où résultent ces deux valeurs de y,

$$(6) \ldots\; y = 0\,, \qquad y = -\frac{2B^2A}{a\,(A^2 - B^2)} \ldots (7);$$

la première indique que le cercle coupe le grand axe aux extrémités A et A′ : les abscisses correspondantes à la seconde valeur de y, sont fournies par l'équation

$$a^2\,(A^2 - B^2)^2\,x^2 = A^2\,[a^2\,(A^2 - B^2)^2 - 4B^2A^2]\,,$$

qui résulte de la substitution de la valeur (7) de y dans (4); on en déduit

$$x = \pm\frac{A\sqrt{a^2\,(A^2 - B^2)^2 - 4B^2A^2}}{a\,(A^2 - B^2)};$$

pour que ces abscisses soient réelles, il faut qu'on ait

$$a^2\,(A^2 - B^2)^2 > 4B^2A^2,$$

condition satisfaite par

$$a > \frac{2BA}{A^2 - B^2}\,, \qquad a < -\frac{2BA}{A^2 - B^2}.$$

Ainsi les limites de l'angle sont (101) l'angle à l'extrémité du grand axe et qui s'appuie sur le petit, et l'angle à l'extrémité du petit axe, et qui s'appuie sur le grand. D'ailleurs, les deux intersections n et n' résolvent pareillement la question.

117. Théorème XII. *Si dans l'ellipse, on mène des extrémités*

M' et N de deux diamètres conjugués CM', CN *des perpendiculaires au grand axe, les triangles* CM'P, CNp *seront équivalens* (fig. 109).

On sait que le diamètre nN est parallèle à la tangente tT menée à la courbe par l'extrémité M' du conjugué : ainsi les triangles PTM' et pCN seront semblables et donneront la proportion

$$\overline{M'P}^2 : \overline{pN}^2 :: \overline{PT}^2 : \overline{Cp}^2 :: \left(\frac{A^2 - x'^2}{x'}\right)^2 : v^2,$$

v désignant l'abscisse Cp : remplaçant $\overline{M'P}^2$ et $\overline{pN}^2$ par leurs valeurs $\frac{B^2}{A^2}(A^2 - x'^2)$, $\frac{B^2}{A^2}(A^2 - v^2)$, on trouvera, après les réductions,

$$A^2 - x'^2 : x'^2 :: v^2 : A^2 - v^2,$$

d'où l'on tire,

$$A^2 : x'^2 :: A^2 : A^2 - v^2;$$

donc

$$x'^2 = A^2 - v^2,$$

c'est-à-dire,

$$\overline{CP}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{Cp}^2 = A'p \times Ap;$$

donc aussi

$$v^2 = A^2 - x'^2,$$

c'est-à-dire,

$$\overline{Cp}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = A'P \times PA.$$

Conséquemment,

$$\overline{CP}^2 : \overline{pN}^2 :: \overline{Cp}^2 : \overline{PM'}^2, \quad \text{d'où} \quad CP \times PM' = Cp \times pN.$$

118. Théorème XIII. *Un demi diamètre est moyen proportionnel entre les deux portions de la tangente qui lui est parallèle, comprises entre le point de tangence et les deux axes suffisamment prolongés* (fig. 109).

Cette tangente $tM'T$ à l'extrémité M' du diamètre CM', étant une parallèle à son conjugué, les triangles PTM', pCN sont semblables, et ils donnent cette proportion

$$\begin{aligned}\overline{M'T}^2 : \overline{CN}^2 &:: \text{aire } TPM' : \text{aire } CpN \\ &:: \text{aire } TPM' : \text{aire } CPM' \\ &:: TP \times PM' : CP \times PM' :: TP : CP \\ &:: TM' : M't;\end{aligned}$$

donc

$$\overline{CN}^2 = M'T \times M't.$$

Corollaire I. Le prolongement $M'I$ du premier diamètre CM' jusqu'à la circonférence décrite sur tT comme diamètre, est une troisième proportionnelle aux demi-diamètres CM', CN : en effet, à cause de l'angle droit tCT, la circonférence tIT ira passer par le centre C, et on aura

$$CM' \times M'I = M'T \times M't = \overline{CN}^2; \quad \text{d'où} \quad M'I = \frac{\overline{CN}^2}{CM'}.$$

Corollaire II. Il est maintenant facile de décrire l'ellipse, connaissant les demi-diamètres conjugués CM', CN et leur angle $M'CN$. A cet effet, on prolongera CM' d'une longueur $M'I$ égale à la troisième proportionnelle $\frac{\overline{CN}^2}{CM'}$, on mènera par M' une droite indéfinie Tt parallèle à CN, par le milieu de CI une perpendiculaire à cette droite qui coupera Tt en un point, et de ce point comme centre, avec la distance du même point au point C, on décrira la demi-circonférence qui coupera la parallèle en T et t où les axes prolongés doivent la rencontrer : joignant T et C, t et C, menant la perpendiculaire $M'P$, et prenant une moyenne proportionnelle CA entre $CP = x'$ et $CT = \frac{A^2}{x'}$, on aura la longueur de l'un des demi-axes, et on déterminera celle de l'autre de la même manière.

119. L'équation de l'ellipse rapportée à des diamètres con-

jugués, et celle de la droite rapportée à ces diamètres comme axes, étant exactement de même forme que celles de la même courbe et de la même droite rapportées à des axes rectangulaires se coupant au centre, on aura cette propriété analogue à celle trouvée (99), savoir :

$$\alpha\alpha' = -\frac{B'^2}{A'^2}\ldots\ldots(1),$$

en observant que α, α' désignent (17) les rapports $\frac{\sin\gamma}{\sin(\zeta-\gamma)}$, $\frac{\sin\gamma'}{\sin(\zeta-\gamma')}$, γ et γ' les angles avec le diamètre $2A'$ de chacune des cordes supplémentaires menées des deux extrémités du diamètre $2A'$ à un point de l'ellipse, et ζ l'angle entre les diamètres $2A'$ et $2B'$.

120. L'équation de la tangente rapportée aux diamètres conjugués, $2A'$, $2B'$, sera toujours

$$A'^2y'y + B'^2x'x = A'^2B'^2,$$

et en désignant $\frac{\sin\omega}{\sin(\zeta-\omega)}$ par a, ω étant l'angle de la tangente avec le diamètre $2A'$, on aura toujours comme au nº 105,

$$a = -\frac{B'^2}{A'^2}\cdot\frac{x'}{y'}\ldots\ldots(2);$$

pareillement l'équation d'une droite menée du centre au point de tangence x', y', donnera

$$a' = \frac{y'}{x'}\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

a' représentant le rapport $\frac{\sin\omega'}{\sin(\zeta-\omega')}$, et ω' l'angle de la droite avec l'axe $2A'$. Ensorte que des relations (2) et (3), on déduira, par la multiplication,

$$aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}\ldots\ldots(4),$$

relation analogue à celle que nous avons trouvée (106) entre les

tangentes des angles faits par les mêmes droites avec l'axe $2A$. Donc encore, si $a=\alpha$, ce qui suppose $\omega=\gamma$, on aura $a'=\alpha'$, c'est-à-dire $\omega'=\gamma'$. On déduira encore de là un procédé analogue à celui donné (106) pour mener une tangente en un point d'une ellipse rapportée à des diamètres conjugués.

121. Pour avoir un système de diamètres conjugués capables d'un angle donné, sans connaître les axes, et en ne supposant que le centre de l'ellipse, il faudra, sur un diamètre quelconque, décrire un arc capable de l'angle donné, par l'intersection de l'ellipse par cet arc, on mènera aux extrémités du diamètre, deux cordes, et par le centre des parallèles à ces cordes, qui formeront le système de diamètres cherchés. Si l'arc de cercle ne rencontrait pas l'ellipse, on ferait la construction sur le diamètre conjugué, ou sur le même diamètre, en prenant le supplément de l'angle donné; et si, dans les deux cas, l'arc de cercle ne rencontrait pas l'ellipse, le problème serait impossible, car l'angle entre les diamètres conjugués n'est pas entiètièrement arbitraire. On a vu (75) une solution analytique de cette question, qui ne suppose que la donnée du centre de la courbe : on peut d'ailleurs la ramener à celle qui a été résolue (116), puisque connaissant le centre, on sait trouver les axes.

CHAPITRE XII.

Propriétés de la parabole.

122. Nous avons trouvé (chap. VII) pour équation de la parabole

$$y^2 = 2px,$$

l'axe des x étant symétrique dans la courbe, et l'axe des y ne faisant que la toucher à l'origine qui est le sommet de la courbe : le coefficient $2p$ se nomme *paramètre*.

123. Théorème I. *Les carrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes.*

Pour deux abscisses x', x'' auxquelles répondent les ordonnées y', y'', on a

$$y'^2 : y''^2 :: 2px' : 2px'' :: x' : x''.$$

124. Théorème II. *La parabole n'est qu'une ellipse dont le grand axe est infini.*

En rapprochant l'équation de la parabole de celle de l'ellipse rapportée au sommet, et énoncée au moyen du paramètre, savoir (103)

$$y^2 = \frac{2p}{2A}(2Ax - xx) = 2p\left(x - \frac{x^2}{2A}\right),$$

on voit que la première courbe n'est que la seconde pour laquelle $A = \infty$, puisqu'alors l'équation de l'ellipse se change dans celle de la parabole.

125. Théorème III. *Le seul foyer qui reste en passant de l'ellipse à la parabole, est sur l'axe symétrique de cette courbe, à une distance du sommet, égale au quart du paramètre* (fig. 110).

Nous avons trouvé (102) cette expression de l'excentricité de l'ellipse,

$$c = \sqrt{A^2 - B^2};$$

si l'on veut compter c de l'origine de l'ellipse, la plus voisine du foyer que l'on considère, il faut écrire

$$A - c = A - \sqrt{A^2 - B^2};$$

mais comme dans l'ellipse $\frac{p}{A} = \frac{B^2}{A^2}$, d'où $B^2 = pA$, on aura, en désignant par c' la distance de l'origine A au foyer F,

$$c' = A - \sqrt{A(A-p)}:$$

si l'on développe le radical suivant les puissances décroissantes de A, on trouve

$$\sqrt{A(A-p)} = A - \tfrac{1}{2}p + (\quad)\frac{1}{A} + \text{etc.}$$

Ainsi,

$$c' = \tfrac{1}{2}p - (\quad)\frac{1}{A} + \text{etc.};$$

mais pour $A = \infty$, hypothèse sous laquelle l'ellipse devient une parabole, l'expression de c' devient

$$c' = \tfrac{1}{2}p = AF.$$

126. Théorème IV. *Le rayon vecteur* FM *est égal à l'abscisse du point* M, *augmentée du quart du paramètre* (fig. 110).

On a

$$FM = \sqrt{y^2 + (x - c')^2} = \sqrt{2px + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Ainsi l'unique rayon vecteur qui existe en passant de l'ellipse

à la parabole, jouit aussi de la propriété d'être exprimé sans radical, au moyen de l'abscisse, propriété qui sert encore à définir la position du foyer.

Corollaire. Si perpendiculairement à l'axe des abscisses (fig. 110), et à une distance $AR = AF = \frac{p}{2}$ de l'origine, on mène une droite SQ, il est clair que la distance MN de chaque point de la courbe à cette droite, est

$$\frac{p}{2} + x = FM.$$

La parabole jouit donc de la propriété d'avoir chacun de ces points autant éloigné du foyer F que d'une droite SQ que nous nommerons *directrice*, dont l'équation se déduit encore de celle de la directrice, de l'ellipse trouvée (109), sous l'hypothèse $A = \infty$; car alors on trouve $X = p$ pour valeur de l'abscisse comptée du foyer, ce qui revient à l'abscisse

$$FR = AR + AF = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p.$$

127. Problème I. *De la description de la parabole.*

1°. On déduit de ce qui vient d'être dit, un moyen fort simple de décrire la parabole par points : à cet effet, on prendra sur l'axe des abscisses (fig. 111) autant de points P que l'on voudra, et par chacun d'eux on mènera des parallèles PD... à la directrice; coupant chaque parallèle en M et m par des arcs décrits du foyer F, comme centre, et avec la distance PR, comme rayon, on déterminera une suite de points M et m qui appartiendront à la parabole.

2°. Si sur une tangente au sommet A (fig. 112), on prend $AG = AR = AF$, et qu'on mène la droite RGD, les triangles semblables RAG, RDP donneront

$$RA : AG :: RP : PD, \quad \text{donc} \quad PD = PR :$$

on pourra donc du foyer F, comme centre, avec PD, comme rayon, décrire des arcs qui couperont la perpendiculaire indéfinie, élevée par P, en des points M et m qui seront à la parabole. Les lignes RD, Rd touchent la parabole aux extrémités T et t de la double ordonnée menée par le foyer. Cette description est analogue à celle de l'ellipse (104), et on observera, 1°. que le parallélogramme G Lgl se change ici dans le triangle DRd; 2°. que l'angle ARG qui, pour l'ellipse, est $< \frac{\pi}{4}$, est ici $= \frac{\pi}{4}$. Ces constructions par points sont préférables aux constructions mécaniques ou par un mouvement continu, sur lesquelles on trouvera beaucoup de détails dans les anciens traités synthétiques de sections coniques, et particulièrement dans un ouvrage renfermant le petit *Traité des Sections coniques* de M. *de La Hire*, publié en 1757.

128. Problème II. *Trouver une courbe telle, que les distances de chacun de ses points à une droite et à un point donné, soient égales entr'elles* (fig. 110).

Soient F et SQ le point et la droite donnés : prenons pour axe des abscisses la ligne RX perpendiculaire à SQ et passant par F, et plaçons l'origine en A, milieu de FR : en désignant toujours FA par $\frac{p}{2}$, et FM par z, on aura

$$z^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

et, d'après l'énoncé,

$$z = x + \frac{p}{2}:$$

on tire de ces deux équations,

$$y^2 = 2px,$$

équation de la parabole qui jouit exclusivement de la propriété énoncée.

129. Problème III. *Énoncer l'équation de la parabole au moyen des coordonnées polaires* (fig. 113).

Si, comme nous l'avons fait dans l'ellipse, on pose

$$x = m + z \cos\varphi, \quad y = n + z \sin\varphi,$$

et si l'on substitue ces valeurs de x et y dans l'équation de la parabole

$$y^2 = 2px,$$

on trouvera pour résultat

$$\sin^2\varphi \cdot z^2 + \left.\begin{matrix} 2n \sin\varphi \\ -2p \cos\varphi \end{matrix}\right| z + \left.\begin{matrix} n^2 \\ -2mp \end{matrix}\right. = 0 \ldots (1)$$

les hypothèses $n = 0$, $m = \frac{p}{2}$ portent le pôle E au foyer F de la courbe, et l'équation précédente devient alors

$$z^2 \sin^2\varphi = p^2 + 2pz \cos\varphi,$$

c'est-à-dire,

$$z^2 = p^2 + 2pz \cos\varphi + z^2 \cos^2\varphi = (p + z \cos\varphi)^2,$$

d'où l'on déduit

$$z = \pm (p + z \cos\varphi);$$

et, à cause du double signe, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$z = \frac{p}{1 - \cos\varphi}, \quad z = -\frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

De ces deux valeurs, la première FM est essentiellement positive, et donne les points de la courbe au-dessus de l'axe; la seconde est négative, et elle se porte en FN sur le prolongement de FM. Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a $z = \pm p$ qui sont les coordonnées Fm, Fm' du foyer.

L'égalité à zéro du terme tout connu de l'équation (1), c'est-à-dire,

$$n^2 = 2mp,$$

porte le pôle E sur la courbe; si de plus on dit que les deux

valeurs correspondantes de z, sont nulles, le rayon vecteur sera tangent à la courbe, et la valeur correspondante de φ sera celle d'une tangente avec l'axe, en un point m, n de la courbe : on aura donc

$$2n \sin\varphi = 2p\cos\varphi, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{p}{n} = \frac{p}{y'},$$

en désignant par y' l'ordonnée du point de tangence : c'est, en effet, ce que donne l'expression (8), [chap. IX], en faisant

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = -2p.$$

130. *Des équations de la tangente et de la normale, et des expressions de la soutangente et de la sounormale de la parabole.*

Si dans les équations générales de la tangente et de la normale, et dans les expressions générales de la soutangente et de la sounormale (chap. IX), on fait $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = -2p$, à l'effet de les faire convenir à la parabole de l'équation

$$y^2 = 2px,$$

on trouve, 1°. pour l'équation de la tangente,

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'), \quad \text{d'où} \quad a = \frac{p}{y'};$$

2°. pour l'expression de la normale,

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x');$$

3°. pour l'expression de la soutangente,

$$\text{soutang} = -\frac{y'^2}{p} = -2x';$$

4°. pour l'expression de la sounormale,

$$\text{sounorm} = \frac{py'}{y'} = p.$$

L'équation de la tangente, après la multiplication par y', et

la réduction au moyen de $y'^2 = 2px'$, prend la forme

$$yy' = p\,(x' + x),$$

qui se change dans celle de la courbe pour $x = x'$, $y = y'$, ce qui doit être.

La valeur de a est propre à faire connaître l'inclinaison sur l'axe des abscisses des élémens consécutifs de la courbe. Pour $y' = 0$, on trouve $a = \infty$; donc la parabole rencontre l'axe des abscisses sous un angle droit. L'ordonnée y' augmentant, a diminue : ainsi les élémens de la parabole tendent à devenir parallèles à l'axe des abscisses, ce qui n'arrive que pour $x' = \infty$, d'où $y' = \infty$ et $a = 0$.

L'expression de la soutangente (fig. 114) savoir :

$$\mathrm{PT} = -\,2x' = -\,2\mathrm{AP},$$

doit être portée de P vers T, en sens contraire de l'abscisse x', portée de A vers P ; ensorte qu'ayant pris AT = AP, on joint le point T au point M' de tangence par la droite TM' qui est la tangente cherchée.

On conclut de l'expression de la sounormale PN, que cette ligne reste de même longueur et qu'elle est toujours la moitié du paramètre, quelle que soit la position du point M'.

131. Théorème V. *L'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur au point de tangence, est égal à celui de la tangente avec une parallèle à l'axe, menée par le point de tangence* (fig. 114).

Si du foyer F dont les coordonnées sont $y'' = 0$, $x'' = \frac{p}{2}$, on mène une droite FM' au point de tangence x', y', on aura pour la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses,

$$\alpha = -\frac{y'}{\frac{p}{2} - x'} :$$

l'angle FM'T que fait cette droite avec la tangente M'T, a

pour tangente trigonométrique

$$\mathrm{V} = \frac{x - a}{1 + ax},$$

a étant la tangente de l'angle M′TF : après les substitutions des valeurs de x et de

$$a = \frac{p}{y}$$

dans V, on trouvera

$$\mathrm{V} = \frac{p}{y} = a;$$

donc l'angle FM′T = FTt = tM′X′, ce qui est la propriété annoncée.

Si l'on observe qu'en passant de l'ellipse à la parabole, le second foyer F′ est à une distance infinie du point A, et qu'ainsi le second rayon vecteur F′M′ devient parallèle à l'axe AX, on reconnaîtra que la propriété de l'ellipse, qui consiste en ce que chaque rayon vecteur fait le même angle avec la portion de tangente qui lui correspond (110), doit se changer dans celle que nous venons de démontrer.

Corollaire I. De là résulte un moyen très-simple de mener une tangente à la parabole par un point extérieur tel que t (fig. 115). Soient F le foyer, et SQ la directrice : du point t, comme centre, avec un rayon tF, on décrira un arc de cercle qui coupera la directrice en L, de ce point, on mènera une parallèle LM′ à l'axe, et le point M′ où cette parallèle rencontrera la parabole, sera celui de tangence, et TM′ la tangente cherchée. En effet, on a

$$\mathrm{M'L} = \mathrm{M'F},$$

et par construction,

$$t\mathrm{L} = t\mathrm{F};$$

donc l'angle LM′t = tM′F = t'M′X′. En rapprochant cette construction de celle qui a été donnée pour l'ellipse (110),

on reconnaîtra qu'elle n'en est qu'une modification déterminée par l'éloignement infini du second foyer de la parabole.

Corollaire II. Le corollaire troisième (110) s'applique ici aux rayons sonores, lumineux ou calorifiques qui viendraient frapper la parabole suivant des directions parallèles à l'axe AX; ils iraient se réunir au foyer F, et la propriété aurait encore lieu dans le paraboloïde engendré par la révolution de la parabole autour de son axe.

Corollaire III. Cette propriété de la parabole, d'avoir une soutangente double de l'abscisse du point de tangence, fournit un moyen de déterminer le sommet, l'axe principal et le foyer d'une parabole; d'après la connaissance de ses deux diamètres représentés (chap. IV) par

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \ldots\ldots (1),$$

$$x = -\frac{By + E}{2C} \ldots\ldots (2),$$

et des limites parallèles aux y et aux x, données (chap. IV) par

$$2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0 \ldots\ldots (3),$$

$$2(BE - 2CD)y + E^2 - 4CF = 0 \ldots\ldots (4).$$

En effet, ayant construit (fig. 116) les demi-diamètres (1) et (2), représentés dans la figure par 1 et 2, et les limites AB et DC domées par les équations (3) et (4), limites qui sont des tangentes à la parabole en A et D, on abaissera du point A une perpendiculaire AE sur le diamètre 2, et du point D une perpendiculaire Df sur le diamètre 1; puis joignant le point A avec le milieu M de BE, et le point D avec le milieu m de Cf, l'intersection S des droites AM et Dm, sera le sommet de la parabole. Pour le démontrer, soit menée par S la parallèle SS′ aux diamètres 1 et 2, laquelle rencontre en T et t les tangentes en A et D; comme on a pris BE = 2EM, on aura TP = 2SP, c'est-à-dire, la soutangente double de l'abscisse du point A; et comme d'ailleurs les coordonnées

SP, PA du point de contact A, sont rectangulaires, le point S est le sommet de la courbe. Pareillement, à cause de $fC = 2fm$, on aura $pt = 2pS$.

Connaissant ainsi le sommet, et conséquemment la direction de l'axe principal SS', parallèle aux diamètres 1 et 2, on pourra facilement trouver le foyer de la courbe : il suffira, à cet effet, de mener le rayon vecteur du point A, c'est-à-dire, par le point A une droite AF, faisant avec AT un angle égal à celui de Af avec AT' : cette droite, par sa rencontre avec l'axe de la courbe qui est connu, déterminera le foyer F cherché. Ayant ainsi le sommet et le foyer, il sera facile de tracer la courbe soit par points, soit par un mouvement continu.

Corollaire IV. Le rectangle $MP \times AP =$ aire MTP (fig. 117), puisque l'aire du triangle $TMP = MP \times \frac{TP}{2}$.

Corollaire V. Puisque le sommet A est le milieu de la soutangente PT, la perpendiculaire AH à l'axe AX, aboutit au milieu H de la portion TM de la tangente ; d'ailleurs, le triangle TFM étant isoscèle, la perpendiculaire menée du foyer F sur TM, aboutit aussi au point H.

Corollaire VI. D'après le corollaire V, on a

$$\overline{FH}^2 = FT \times FA = FM \times FA = FM \times c;$$

or c étant une constante, on a cette propriété : *la perpendiculaire menée du foyer sur une tangente, croît comme la racine carrée du rayon vecteur mené au point de tangence.*

132. En désignant par $2p'$ le paramètre d'un diamètre quelconque MX' (fig. 117), nous avons trouvé (74)

$$2p' = 2(p + 2a) = 2(p + 2x),$$

x étant l'abscisse du point M : or la distance du point M à la directrice QS, est $\frac{p}{2} + x$ (126) ; donc $2p'$ est quadruple de cette

distance. Ainsi *le paramètre d'un diamètre surpasse toujours celui de l'axe, du quadruple de l'abscisse correspondante à l'intersection de la courbe par ce diamètre.*

Il sera facile de prouver que la soutangente comptée sur un diamètre quelconque, est double de l'abscisse du point de tangence.

133. Nous terminerons par la solution de deux problèmes déterminés.

Problème IV. *Trouver sur l'axe d'une parabole, le centre* N *d'un cercle qui touche une ordonnée* M'P'm' *donnée de position, et la parabole en deux points* (fig. 118).

On prendra sur l'axe, et à partir de P', une longueur $P'P = P'M'$; au point P on élevera la double donnée MPm, et ayant pris PN égale à moitié du paramètre, le point N sera le centre, et MN le rayon du cercle cherché.

D'après cette construction, la ligne PN est la sounormale du point M (130); donc la tangente TMt l'est en même temps à la parabole et au cercle décrit du centre N; donc déjà ce cercle touche la parabole en M et m. En second lieu, on a

$$\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2p\,(AP' - P'P) + p^2,$$

$$\overline{P'N}^2 = (P'P - PN)^2 = (P'M' - PN)^2 = \overline{P'M'}^2 + \overline{PN}^2 - 2P'M' \times PN$$
$$= 2p\,(AP' - P'P) + p^2;$$

donc $$MN = P'N.$$

Problème V. *Inscrire dans une parabole, une droite* Mm *d'une longueur donnée qui passe par un point G donné de position* (fig. 119).

Pour avoir la position de la droite Mm, on pourrait indifféremment chercher les points M ou m; mais comme ils sont déterminés de la même manière, le premier par les lignes MG, MP ou AP, le second par les lignes mG, mp ou Ap, il ne faudra se servir d'aucun de ces deux points, mais plutôt d'un troisième point F qui ait avec eux la même relation, ou dont ceux-là dépendent de la même manière (chap. 1er).

Soient donc $AE = x'$, $EG = y'$, $mM = c$, $FE = z$, $AP = x$; $PM = y$: on aura $FP = x + z - x'$: or de la proportion $GE : EF :: MP : PF$, on déduit $FP = \frac{yz}{y'}$; égalant les deux valeurs de FP, on obtient

$$x + z - x' = \frac{yz}{y'}.$$

Si de l'équation de la parabole, on tire la valeur de x pour la substituer dans la précédente, et qu'on résolve ensuite par rapport à y, on aura

$$y = \frac{pz}{y'} \pm \sqrt{\left[\frac{p^2z^2}{y'^2} + 2p\,(x' - z)\right]}.$$

Pour construire ce radical, on portera la longueur $\frac{pz}{y'}$ de P en K; puis à partir du point K, les longueurs KM, KM′ respectivement égales au radical, construction qu'on fera sur une tangente indéfinie au sommet A; ensorte que

$$MM' = 2\sqrt{\frac{p^2z^2}{y'^2} + 2p\,(x' - z)}.$$

Or la proportion

$$FG : GE :: mM : MM'$$

devient

$$\sqrt{y'^2 + z^2} : y' :: c : 2\sqrt{\frac{p^2z^2}{y'^2} + 2p\,(x' - z)};$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, élevant au carré et ordonnant, on trouve cette équation du quatrième degré

$$z^4 = \frac{8py'^2z^3 - 4py'^2\,(p + 2x')\,z^2 + 8py'^4z - (8px' - c^2)\,y'^4}{4p^2},$$

constructible par deux lignes du second degré (chap. VIII). On aurait été conduit à une équation du huitième degré, si l'on eût cherché AP ou MP, parce qu'on aurait déterminé en même temps AP et Ap, PM et pm.

CHAPITRE XIII.

Propriétés de l'hyperbole.

134. Nous avons trouvé (58) pour équation de cette courbe rapportée au centre et aux axes principaux,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2.$$

et pour équations de la même courbe rapportée à l'un des sommets (fig. 120), et à deux axes dont l'un est symétrique et l'autre tangent,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - 2AB^2x, \quad A^2y^2 - B^2x^2 = 2AB^2x,$$

d'où l'on tire

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2),$$

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - 2Ax),$$

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 + 2Ax),$$

équations qu'on peut employer indifféremment, pourvu cependant qu'on ne perde pas de vue la position de l'origine que chacune d'elles suppose.

135. Théorème I. *Les carrés des ordonnées sont comme les produits de leurs distances aux deux sommets* (fig. 120).

En effet, pour deux abscisses $x' = AP'$, $x'' = AP''$, dont les coordonnées sont $y' = P'M'$, $y'' = P'M''$, on a

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{(x' + A)(x' - A)}{(x'' + A)(x'' - A)} = \frac{A'P' \times AP'}{A'P'' \times AP''}.$$

136. Théorème II. *Dans l'hyperbole ordinaire, le produit des tangentes trigonométriques des angles faits avec le grand axe,*

et dans le même sens, par des cordes menées des deux extrémités de cet axe, a tout point de l'hyperbole, est constant et égal à $\frac{B^2}{A^2}$ (fig. 120).

La marche de la solution étant exactement la même que pour l'ellipse, nous nous dispenserons de refaire le calcul. On observera que la propriété analogue de l'ellipse, étant (99)

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

il ne faut que changer B en $B\sqrt{-1}$, pour passer à celle de l'hyperbole.

Corollaire I. Comme le produit $\alpha\alpha'$ est positif dans l'hyperbole, on en conclura que les angles MAX, MA′X sont en même temps aigus ou obtus, suivant que le point M est sur la branche des abscisses positives ou négatives.

Corollaire II. Pour l'hyperbole équilatère, $B = A$, et la propriété devient

$$\alpha\alpha' = 1:$$

ainsi les angles MAX, MA′X valent en somme un droit.

Corollaire III. Ayant trouvé

$$\alpha = \frac{y}{x - A}, \quad \alpha' = \frac{y}{x + A},$$

on en déduit

$$\text{tang AMA}' = \text{tang V} = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{2AB}{(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{x^2}{A^2} - 1}};$$

or l'abscisse x augmentant, tang V diminue; donc l'angle décroît jusqu'à zéro. Pour l'hyperbole équilatère, $A = B$, et

$$\text{tang V} = \frac{A}{\sqrt{x^2 - A^2}},$$

et pour l'abscisse $x = A\sqrt{2}$, on a tang $V = 1$.

137. Problème I. *Description par points de l'hyperbole équilatère* (fig. 121).

Cette hyperbole a pour équation

$$y^2 - x^2 = - A^2, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{A^2 + y^2} = CP;$$

or si d'un point quelconque M de cette hyperbole, on mène une perpendiculaire MQ sur l'axe des y, et qu'on joigne le point Q au sommet A, on a aussi

$$QA = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{CQ}^2} = \sqrt{A^2 + y^2};$$

donc

$$CP = QM = QA.$$

Ainsi, *par tous les points du second axe, on mènera des parallèles au premier, et rapportant sur chacune d'elles la distance du point du second axe par lequel elle est menée, au sommet A donné, on aura autant de points de l'hyperbole équilatère.*

138. Problème II. *Trouver le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes, soit toujours égale à une ligne donnée* 2A (fig. 122).

Ainsi que nous l'avons fait dans l'ellipse, prenons pour l'axe des x, la droite qui passe par les deux points fixes F et F', et le milieu C de la distance $2c$ entre ces deux points, pour l'origine des coordonnées : nous aurons, d'après l'énoncé,

$$z' - z = 2A \ldots\ldots (1),$$

en désignant F'M par z', et FM par z. Soient $CP = x$, $PM = y$ les coordonnées du point M : nous aurons ces deux traductions

$$(2) \ldots \; z'^2 = y^2 + (x+c)^2, \qquad z^2 = y^2 + (x-c)^2 \ldots (3),$$

équations qui serviront à déterminer z' et z en x et y; retranchant (3) de (2), il vient

$$z'^2 - z^2 = 4cx, \quad \text{d'où} \quad z' + z = \frac{4cx}{z'-z} = \frac{2cx}{A},$$

d'après (1) : connaissant $z'-z$ et $z'+z$, on trouve facilement

$$(4)\ldots\quad z'=\frac{cx}{A}+A,\qquad z=\frac{cx}{A}-A\ldots(5).$$

Si maintenant on combine par addition les équations (2) et (3), on trouvera

$$z'^2+z^2=2y^2+2x^2+2c^2;$$

et après avoir remplacé z'^2, z^2 par leurs valeurs tirées de (4) et (5), et fait les réductions, on aura

$$A^2(A^2-c^2)=A^2(y^2+x^2)-c^2x^2\ldots\ldots(6):$$

or il est évident qu'il ne peut y avoir sur l'axe des y passant par le milieu de FF', un point tel que $F'N-FN=2A$, puisque, pour ce point, cette différence est nulle : ainsi l'ordonnée y correspondante à $x=0$, sera nécessairement imaginaire ou de la forme $B\sqrt{-1}$: or à cette hypothèse faite sur x dans (6), répond

$$y^2=A^2-c^2=-B^2,\quad \text{d'où}\quad c^2=A^2+B^2\ldots(7);$$

reportant cette détermination (7) dans (6), on trouve que le lieu des points cherchés est représenté par

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2,$$

équation de l'hyperbole qui jouit exclusivement de la propriété énoncée.

Les points F et F' situés sur l'axe réel de la courbe et déterminés par

$$c=+\sqrt{A^2+B^2},\qquad c=-\sqrt{A^2+B^2},$$

sont nommés *les foyers* de l'hyperbole, et F'M, FM sont dits *rayons vecteurs.*

Ainsi, *dans l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs est égale au grand axe.*

Remarque I. Pour passer de l'expression de c trouvée pour l'ellipse (102), à l'expression de c pour l'hyperbole, il ne faut encore que changer B en $B\sqrt{-1}$ dans la première.

Remarque II. Chacun des rayons vecteurs (4) et (5), dont

les expressions reviennent à celles-ci

$$z' = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{A}x + A, \quad z = \mp\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{A}x - A,$$

est énoncé d'une manière rationnelle au moyen de l'abscisse x: on peut même partir de cette condition pour déterminer les foyers.

Corollaire I. Le second demi-axe B est moyen proportionnel entre les deux distances d'un foyer aux sommets. En effet, de $c+A : B :: B : c-A$, on tire

$$B^2 = c^2 - A^2 = A^2 + B^2 - A^2 = B^2.$$

Corollaire II. L'équation de l'hyperbole,

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2),$$

en y faisant $x^2 = 2A^2$, donne

$$y^2 = B^2:$$

connaissant actuellement les deux demi-axes, on peut trouver les foyers. Cette abscisse x à laquelle répond l'ordonnée $y = B$, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle dont chaque côté de l'angle droit est égal à A.

139. *Enoncer les équations de l'hyperbole, au moyen du paramètre ou de la double ordonnée du foyer.*

L'abscisse du foyer est $x = \sqrt{A^2+B^2}$: pour avoir l'ordonnée correspondante, il faut reporter cette valeur de x dans l'équation

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2),$$

et on en tire

$$y^2 = \frac{B^4}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{B^2}{A} = p \quad \text{et} \quad \frac{B^2}{A^2} = \frac{p}{A};$$

par cette substitution, l'équation de l'hyperbole devient

$$y^2 = \frac{p}{A}(x^2 - A^2).$$

On a aussi pour l'origine placée à l'un des sommets de la courbe,

$$y^2 = \frac{p}{A}(x^2 - 2Ax).$$

Pour l'hyperbole équilatère, on a

$$p = \frac{B^2}{A} = A.$$

140. Problème III. *De la description de l'hyperbole* (fig. 122).

1°. Du foyer F, comme centre, avec un rayon quelconque, je décris un arc de cercle, puis de l'autre foyer F′, avec un rayon qui diffère du premier d'une longueur égale au grand axe, je décris un autre arc de cercle : ce dernier arc coupera le premier en M, par exemple; et comme $F'M - FM = 2A$, le point M sera à l'hyperbole.

2°. Nous donnerons une seconde description analogue à celle de l'ellipse et de la parabole. Aux extrémités A et A′ du grand axe (fig. 123), on élevera les perpendiculaires $AG = AF$, $A'L = A'F$, la première au-dessous, et la seconde au-dessus de l'axe XX′; on prolongera LG indéfiniment, ensuite par des points P, P, etc., pris sur l'axe, on élevera à cet axe des perpendiculaires terminées en D, D, etc. à la ligne LG, qu'on coupera en des points M, M, etc., par des arcs de cercles décrits du foyer F, comme centre, avec les rayons PD, PD, etc. : on aurait pu prendre $A'g = A'F'$, $Al = AF'$; et menant gl qui est parallèle à GL, on déterminerait les points M, M, etc., au moyen de cette ligne gl, du foyer F′ et des arcs décrits du centre F′ avec les rayons Pd, Pd, etc.

Il s'agit de démontrer que les points M, M′, etc. sont à l'hyperbole. On a, par construction,

$$Al = AF', \quad AG = AF = A'F',$$

donc

$$Al - AG = AF' - A'F' = AA' = 2A;$$

toutes les parallèles Dd, Dd, etc. sont donc égales au grand axe. Cela posé, on a $FM = PD$; mais aussi parce que le

même point M aurait pu être déterminé en coupant Pd par un arc décrit du centre F′ avec le rayon Pd, on a $F'M = Pd$; donc

$$F'M - FM = Pd - PD = Dd = Al - AG = 2A:$$

et conséquemment le lieu des points M, M, etc., est une hyperbole.

On remarquera, 1°. que les lignes RD et rd sont tangentes à l'hyperbole aux extrémités m et m' des ordonnées qui passent par le foyer; 2°. que l'angle ARG est $> \frac{\pi}{4}$ tandis qu'il est $< \frac{\pi}{4}$ pour l'ellipse, et $= \frac{\pi}{4}$ pour la parabole.

Il sera encore nécessaire et facile de prouver que pour tout point intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs n'est plus égale au grand axe.

141. Problème IV. *Enoncer l'équation de l'hyperbole au moyen des coordonnées polaires.* (fig. 124).

Dans l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

faisons les substitutions (25)

$$x = p + z\cos\varphi, \qquad y = q + z\sin\varphi,$$

et il viendra

$$\left.\begin{array}{r} A^2\sin^2\varphi \\ -B^2\cos^2\varphi \end{array}\right| z^2 + \left.\begin{array}{r} 2qA^2\sin\varphi \\ -2pB^2\cos\varphi \end{array}\right| z + \left.\begin{array}{r} q^2A^2 \\ -p^2B^2 \\ +A^2B^2 \end{array}\right| = 0 \ldots\ldots(1).$$

Les hypothèses $p = 0$, $q = 0$ portent le pôle E au centre de la courbe, et l'équation (1) devient

$$(A^2\sin^2\varphi - B^2\cos^2\varphi)\,z^2 = -A^2B^2,$$

d'où

$$z = \pm\frac{AB}{\sqrt{B^2\cos^2\varphi - A^2\sin^2\varphi}} \ldots\ldots(2):$$

cette valeur de z n'est réelle que pour

$$B^2\cos^2\varphi > A^2\sin^2\varphi, \quad \text{d'où} \quad \tang\varphi < \pm\frac{B}{A};$$

conclusion déjà obtenue (63). Pour $A^2\sin^2\varphi = B^2\cos^2\varphi$, on a $z = \infty$. En égalant à zéro le terme tout connu, on porte le pôle E sur l'hyperbole; et si l'on écrit que la seconde valeur de z est nulle comme la première, le rayon vecteur deviendra tangent à la courbe en E. On trouve ainsi

$$z = 0, \quad z = 2qA^2\sin\varphi - 2pB^2\cos\varphi = 0,$$

d'où

$$\tang\varphi = \frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{p}{q} = \frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'}{y'},$$

en changeant p en x' et q en y'.

Si dans (1) on fait $q = 0$, $p = CF = \sqrt{A^2+B^2}$, ce qui revient à placer le pôle en l'un des foyers F, on trouvera pour résultat de ces substitutions, après les réductions,

$$A^2z^2 = c^2z^2\cos^2\varphi + 2B^2cz\cos\varphi + B^4,$$

et en observant que le second membre est le carré de $cz\cos\varphi + B^2$, on aura, par l'extraction de la racine carrée des deux membres

$$Az = \pm(cz\cos\varphi + B^2),$$

d'où

$$z = +\frac{B^2}{A - c\cos\varphi}, \quad z = -\frac{B^2}{A + c\cos\varphi},$$

expressions qu'on aurait encore pu déduire de leurs analogues pour l'ellipse (108), en changeant dans celles-ci B en $B\sqrt{-1}$.

142. *Des équations de la tangente et de la normale, et des expressions de la soutangente et de la sounormale.*

Si dans les formules (15)....(17) trouvées (82), on fait $M = A^2$, $N = -B^2$, à l'effet de les faire convenir à l'équation de l'hyperbole au centre et aux axes, on aura,

1°. Pour l'équation de la tangente,

$$y - y' = \frac{B^2x'}{A^2y'}(x - x')\ldots(1);$$

2°. Pour celle de la normale,

$$y - y' = -\frac{A^2y'}{B^2x'}(x - x')\ldots(2);$$

3°. Pour l'expression de la soutangente,

$$\text{soutang.} = -\frac{A^2y'^2}{B^2x'}\ldots\ldots\ldots\ldots(3);$$

4°. Pour celle de la sounormale,

$$\text{sounorm.} = \frac{B^2x'}{A^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(4);$$

5°. enfin

$$a = \frac{B^2x'}{A^2y'}\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

a désignant la tangente trigonométrique de l'angle entre la tangente et l'axe des x. Si l'on fait disparaître le dénominateur dans l'équation (1), et si l'on observe que $A^2y'^2 - B^2x'^2 = -A^2B^2$, parce que le point x', y' est sur l'hyperbole, on tombera sur cette équation transformée de la tangente

$$A^2y'y - B^2x'x = -A^2B^2\ldots\ldots(6).$$

Pour $y' = 0$, c'est-à-dire, aux sommets A et A', l'élément de courbe, ou le petit côté de la courbe considérée comme un polygone régulier d'une infinité de côtés dont chacun est infiniment petit, est perpendiculaire à l'axe des abcisses, puisqu'on a $a = \infty$: l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses, ne peut devenir nulle, car pour $x = \infty$, on a $y = \infty$, ensorte que a n'est pas zéro.

143. Problème V. *Mener une tangente à l'hyperbole en un point M' donné sur la courbe* (fig. 125).

La droite menée par le centre C et le point de tangence M', a pour équation

$$y = \frac{y'}{x'}x, \qquad \text{d'où} \qquad a' = \frac{y'}{x'}\ldots\ldots(1);$$

on sait d'ailleurs que

$$a = \frac{B^2 x'}{A^2 y'} \ldots\ldots (2)\,;$$

multipliant (1) par (2), on obtient cette relation

$$aa' = \frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots\ldots (3)\,;$$

mais nous avons trouvé (théor. II),

$$\alpha\alpha' = +\frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots (4),$$

pour le produit des tangentes des angles entre les cordes AM, A'M et l'axe des abscisses; donc si $\alpha' = a'$, nécessairement $\alpha = a$; conséquemment la corde A'M étant parallèle au demi-diamètre CM', la tangente TM' sera parallèle à la corde supplémentaire AM.

Cette propriété fournit pour mener une tangente à l'hyperbole en un point donné sur cette courbe, un procédé exactement analogue à celui que nous avons prescrit (106) à l'égard de l'ellipse.

Le point de tangence M' est sur une hyperbole décrite sur CT comme grand axe, et dont le rapport des axes est $\frac{B}{A}$ (voyez ce qui a été dit sur l'ellipse (106)).

144. Problème VI. *Trouver le lieu des extrémités des soutangentes polaires de l'hyperbole* (fig. 126).

En prenant toujours l'origine au centre C, et désignant par x', y' les coordonnées du point de tangence M', on a pour équation de FM',

$$y = \frac{y'}{x' - c}(x - c),$$

et pour équation de la perpendiculaire Fr à FM',

$$y = \frac{c - x'}{y'}(x - c)\,;$$

après la substitution de cette valeur de y dans l'équation de

la tangente à l'hyperbole (142)

$$A^2y'y - B^2x'x = -A^2B^2,$$

on trouve

$$x = \frac{A^2}{c} = \pm \frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

expression qui ne diffère encore de celle de l'ellipse (109) que par le changement de B en $B\sqrt{-1}$. Il existe donc une directrice pour chaque branche de l'hyperbole qui coupe le grand axe entre le centre et chacun des sommets A et A'.

145. Théorème III. *Les droites menées du point de tangence aux foyers de l'hyperbole, font avec la tangente, et de part et d'autre de cette ligne, des angles égaux* (fig. 127).

La tangente de l'angle M'FX est

$$\alpha = \frac{-y'}{c-x'},$$

et d'ailleurs la tangente de l'angle M'TX est (142)

$$a = \frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'}{y'};$$

donc en désignant par V la tangente de l'angle FM'T, on aura

$$\text{tang V} = +\frac{B^2}{cy'};$$

la tangente de l'angle F'M'T = V' est encore

$$\text{tang V}' = +\frac{B^2}{cy'},$$

comme on peut le déduire de

$$\text{tang V}' = \frac{a-\alpha'}{1+a\alpha'},$$

en y remplaçant a et $\alpha' = \text{tang M'F'X}$ par $\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'}{y'}$ et $\frac{y'}{c+x'}$.

Corollaire I. Si l'on prolonge le rayon vecteur F'M', l'angle

de ces extrémités, on tirera une droite qui sera une asymptote dont le prolongement deviendra celle de la branche opposée.

Il est facile de s'assurer que, pour une abscisse quelconque, l'ordonnée de l'asymptote est plus grande que celle de la courbe; car d'après l'équation de la courbe, on a

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}x^2 - B^2,$$

et d'après celles des asymptotes, on a

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}x^2;$$

ces deux valeurs de y^2 ne sont égales que pour $x = \infty$, puisqu'alors on peut négliger le terme B^2 dans l'avant-dernière équation. Il est essentiel d'observer que l'équation des asymptotes diffère de celle de l'hyperbole, par la suppression du terme tout connu dans cette dernière (*).

Nous avons reconnu (73) que les diamètres égaux de l'ellipse étant prolongés, sont des asymptotes de l'hyperbole, et réciproquement.

148. Lorsque le point duquel on doit mener une tangente à l'hyperbole, est donné dans l'angle SCS′ des asymptotes,

---

(*) Si l'on multiplie entre elles les équations (1) des asymptotes trouvées (41), on obtient, après les réductions, cette équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + \frac{BDE - CD^2 - AE^2}{B^2 - 4AC} = 0$$

qui, pour $D = 0$, $E = 0$, se réduit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0;$$

ainsi, lorsque l'hyperbole est rapportée au centre, le produit des équations des asymptotes est l'équation même de la courbe, en supprimant dans celle-ci le terme connu; et, en général, ce produit ne diffère de l'équation de la courbe que par ce terme tout connu.

qui renferme une des branches, comme en t (fig. 130), les deux tangentes tM', tm' touchent cette branche, et il est visible que leurs prolongemens coupant CS' et CS, restent au-dessus et au-dessous de la branche opposée. Si le point est en t' dans l'angle sCS qui renferme l'espace imaginaire, les deux tangentes $t'N$, $t'N'$ se distribuent entre les deux branches de la courbe qu'elles touchent aux extrémités des ordonnées négatives : il suffit de considérer ces deux positions t et t' du point donné.

149. Théorème V. *Si une branche d'hyperbole est coupée par une droite quelconque qui se termine aux asymptotes, les portions de cette droite, interceptées entre chaque asymptote et la portion de la branche qui lui correspond, sont égales entr'elles* (fig. 131).

Reprenons l'équation (1), (141), et représentons le terme tout connu par M; nous aurons, après la division par le coefficient de z^2,

$$z^2+\frac{2(qA^2\sin\varphi-pB^2\cos\varphi)}{A^2\sin^2\varphi-B^2\cos^2\varphi}z+\frac{M}{A^2\sin^2\varphi-B^2\cos^2\varphi}=0.$$

Pour transporter le pôle E des rayons vecteurs sur l'asymptote CS en m, il faut changer p et q en x' et y' qui sont les coordonnées du point m, et établir entre x' et y' la relation

$$y'=\frac{B}{A}x',$$

qui exprime en effet que le point m est sur l'asymptote CS : on aura donc

$$z^2+\frac{2Bx'(A\sin\varphi-B\cos\varphi)}{A^2\sin^2\varphi-B^2\cos^2\varphi}z+\frac{M}{A^2\sin^2\varphi-B^2\cos^2\varphi}=0\ldots(1):$$

or en désignant par z' et z'' les deux racines mR, mR' de cette équation, on a

$$z'+z''=-\frac{2Bx'(A\sin\varphi-B\cos\varphi)}{A^2\sin^2\varphi-B^2\cos^2\varphi};$$

mais α étant la tangente de l'angle mKX, on sait que

$$\sin\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},\qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

donc

$$z' + z'' = -\frac{2\mathrm{B}x'\sqrt{1+\alpha^2}}{\mathrm{B}+\mathrm{A}\alpha} = m\mathrm{R} + m\mathrm{R}' \ldots\ldots (2).$$

Si l'on observe qu'en faisant $\mathrm{M}=0$ dans (1), les deux valeurs z', z'' de z deviennent les distances du point m aux deux points de rencontre de la transversale mm' avec les asymptotes CS, CS$'$, puisque, par cette hypothèse, on substitue l'équation des asymptotes à celle de l'hyperbole (147), on reconnaîtra qu'on a aussi

$$-\frac{2\mathrm{B}x'\sqrt{1+\alpha^2}}{\mathrm{B}+\mathrm{A}\alpha} = mm' \ldots\ldots (3).$$

Des égalités (2) et (3), on conclut

$$m\mathrm{R} + m\mathrm{R}' = mm' = m\mathrm{R}' + \mathrm{R}'m', \quad \text{d'où} \quad m\mathrm{R} = \mathrm{R}'m',$$

ce qui est la propriété énoncée dont nous donnerons bientôt une autre démonstration.

Cette propriété fournit un moyen de construire l'hyperbole, lorsqu'on connaît ses asymptotes, et l'un de ses points, tel que R. En effet, menant par ce point des droites quelconques $n\mathrm{R}rn'$, puis prenant $n'r = \mathrm{R}n$, on a en r un point de l'hyperbole qui sert à en faire trouver d'autres.

150. Théorème VI. *Dans l'hyperbole rapportée aux asymptotes, la soutangente* Ct, *comptée du centre sur l'asymptote* CS$'$ *qui sert d'axe des abscisses, est double de l'abscisse* Cp *du point de tangence* (fig. 132).

L'équation de la tangente au point x', y', ou M$'$, est

$$\mathrm{A}^2y'y - \mathrm{B}^2x'x = -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2;$$

celle de l'asymptote CS$'$, est

$$y = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x \ldots (1);$$

l'abscisse Cq de l'intersection de ces deux droites, résulte de l'élimination de y entre ces deux équations, opération qui donne

$$Cq = x = \frac{A^2B}{Ay' + Bx'} \ldots\ldots (2).$$

Comparons cette abscisse à l'abscisse Cq' de l'intersection avec CS′ d'une parallèle à CS menée par le point de tangence M′ : l'équation de cette parallèle est

$$y - y' = \frac{B}{A}(x - x'), \quad \text{d'où} \quad y = y' + \frac{B}{A}(x - x') :$$

reportant cette valeur de y dans (1), on obtient

$$Cq' = X = \frac{Bx' - Ay'}{2B} \ldots (3).$$

Réduisant les expressions (2) et (3) au même dénominateur, et tenant compte de l'équation de l'hyperbole qui a lieu pour le point x', y', on trouve

$$x = \frac{2A^2B^2}{2B(Ay' + Bx')}, \quad X = \frac{A^2B^2}{2B(Ay' + Bx')};$$

donc $Cq = 2Cq'$, et conséquemment, $Ct = 2Cp$. Cette propriété fournit un moyen bien simple de mener une tangente en un point M′ donné sur une hyperbole dont on a les asymptotes.

151. Théorème VII. *L'aire du parallélogramme* CDAD′, *dans lequel les côtés* AD *ou* CD′ *et* AD′ *sont les coordonnées du sommet* A *rapporté aux asymptotes, est égale à celle du parallélogramme construit sur les coordonnées d'un point quelconque* M *rapporté aux asymptotes* (fig. 133).

Reprenons l'équation de l'hyperbole aux asymptotes CX, CY trouvée (73), savoir :

$$xy = \frac{A^2 + B^2}{4} \ldots\ldots (1) :$$

CB = CB′ étant le demi-second axe, les quatre côtés AB, BA′, A′B′, B′A sont égaux, et la figure ABA′B′A est un parallélogramme et même un losange : si du point H, milieu de AC, on élève une perpendiculaire, elle passera par les intersections D et D′ des côtés AB, A′B′ avec les asymptotes ; on aura donc

$$\overline{AD}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{DH}^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} = \overline{CD'}^2;$$

mais en désignant par $\mathfrak{C}$ l'angle entre les asymptotes, et abaissant la perpendiculaire Ah sur CD′, on a

$$Ah = AD' \sin \mathfrak{C} = CD' \sin \mathfrak{C},$$

en observant que la figure ADCD′ est aussi un losange ; donc

$$\frac{A^2 + B^2}{4} \sin \mathfrak{C} = \overline{CD'}^2 \sin \mathfrak{C} = CD' \times Ah = \textit{aire } ADCD';$$

d'une autre part

$$xy \sin \mathfrak{C} = \textit{aire } CPMN;$$

donc d'après l'équation (1) qui donne

$$xy \sin \mathfrak{C} = \frac{A^2 + B^2}{4} \sin \mathfrak{C} \ldots\ldots (2),$$

on parvient à la propriété annoncée

$$\textit{aire } ADCD' = \textit{aire } CPMN;$$

Le grand losange ABA′B′, quadruple de ADCD′, se nomme la *puissance de l'hyperbole.*

Corollaire. Lorsque l'hyperbole est équilatère, l'angle des asymptotes est droit, $\sin \mathfrak{C} = 1$, et le losange ADCD′ devient un carré, lequel est toujours égal au rectangle des coordonnées.

152. Théorème VIII. *Si l'on mène le demi-diamètre* CM′ *et la tangente* TM′t, *on aura toujours*

$$\overline{CM'}^2 - \overline{TM'}^2 = A^2 - B^2,$$

A *et* B *étant les demi-axes de l'hyperbole* (fig. 134).

Si l'on nomme toujours C l'angle entre les asymptotes CX, CY; x' et y' les coordonnées CP', P'M', les triangles CM'P', P'M'T donneront (Géom.)

$$\overline{CM'}^2 = y'^2 + x'^2 \pm 2x'y' \cos \mathsf{C},$$

$$\overline{TM'}^2 = y'^2 + x'^2 \mp 2x'y' \cos \mathsf{C};$$

donc

$$\overline{CM'}^2 - \overline{TM'}^2 = 4x'y' \cos \mathsf{C} \ldots\ldots (1).$$

Or l'angle θ formé par chacune des asymptotes avec le grand axe de la courbe, a pour tangente trigonométrique $\frac{B}{A}$; on aura donc

$$\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

et, à cause de $\mathsf{C} = 2\theta$,

$$\cos \mathsf{C} = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \ldots\ldots (2):$$

or l'équation de la courbe rapportée aux asymptotes et au point x', y', est

$$4x'y' = A^2 + B^2,$$

et conséquemment,

$$4x'y' \cos \mathsf{C} = A^2 - B^2 \ldots\ldots (3);$$

donc, d'après (1),

$$\overline{CM'}^2 - \overline{TM'}^2 = A^2 - B^2 \ldots\ldots (4):$$

telle est (72) la relation qui existe entre les demi-diamètres et les demi-axes de l'hyperbole : or M'Cm' est un de ces diamètres ; donc tM'T $=$ 2M'T (150) est l'autre en longueur. Donc ayant de longueur et de position celui des diamètres conjugués qui aboutit à la courbe, en passant par le centre, l'autre sera, en longueur, la tangente menée par l'une de ses extrémités et prolongée jusqu'aux asymptotes : pour l'avoir en position, on le ramènera à passer par le centre, parallèlement à la tangente tM'T : ce second diamètre

ne rencontrera pas les branches de l'hyperbole, et dans l'équation de l'hyperbole rapportée à ce système de diamètres conjugués, TM′ sera le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'expression de l'ordonnée correspondante à l'abscisse nulle, comme on l'a vu (71).

Corollaire. Si l'on observe que Ct est double de P′M′, et CT double de CP′ (fig. 134), on reconnaîtra que

$$\text{aire } CTt = 2y'x' \sin \mathcal{C} = 2 \text{ aire } CPM'N' = 2 \text{ aire } ADCD'$$

(151), [fig. 133] : mais

$$\text{aire } ADCD' = 2 \text{ aire } ADC = \frac{A \times B}{2} :$$

donc

$$\text{aire } CTt = A \times B.$$

Donc *l'aire du triangle* TCt *est égale à l'aire du rectangle formée par les demi-axes.*

153. Problème VIII. *Etant donné de position et de grandeur le demi-diamètre réel* CM′ *de l'hyperbole, trouver son conjugué* CN *de grandeur et de position* (fig. 135).

Le demi-diamètre CN étant parallèle à la tangente M′T, la tangente de l'angle NCP est (142)

$$a = \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x'}{y'},$$

et conséquemment l'équation de CN, est

$$y = \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x'}{y'} \cdot x \ldots . (1);$$

on a d'ailleurs (152) la propriété

$$\overline{CM'}^2 - \overline{CN}^2 = A^2 - B^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{CN}^2 = \overline{CM'}^2 - A^2 + B^2$$
$$= y'^2 + x'^2 - A^2 + B^2;$$

le triangle CpN rectangle, donne

$$\overline{CN}^2 = \overline{Cp}^2 + \overline{pN}^2,$$

égalant ces deux valeurs de $\overline{CN}^2$, remplaçant l'ordonnée pN par

sa valeur (1) et Cp par x, on trouve après quelques réductions,

$$x = Cp = \sqrt{x'^2 - A^2} = \sqrt{(x'+A)(x'-A)} = \sqrt{P'A' \times P'A}.$$

Ainsi après avoir mené par le centre de l'hyperbole, une parallèle indéfinie à la tangente en M′ où aboutit le diamètre donné CM′, et porté l'abscisse Cp égale à la moyenne proportionnelle entre P′A′ et P′A, on élevera par p une perpendiculaire prolongée jusqu'à la rencontre de cette parallèle en N, et CN sera le demi-diamètre conjugué de CM′ en longueur et en position.

Corollaire Ier. Si dans l'équation (1) on remplace x par sa valeur $\sqrt{x'^2 - A^2}$, on aura

$$y = pN = \frac{B}{A} x';$$

de ces valeurs de Cp et pN, on conclut

$$Cp \times pN = \frac{B}{A} x' \sqrt{x'^2 - A^2} = CP' \times P'M';$$

et conséquemment l'égalité des aires CpN, CP′M′, propriété qui trouve son emploi dans le théorème suivant.

154. Théorème IX. *Le carré du demi-diamètre conjugué* CN, *est égal au rectangle* M′T × M′t *des portions de la tangente en* M′, *comprises entre* M′ *et les axes principaux de la courbe* (fig. 135).

Les triangles semblables P′TM′, pCN donnent

$$\overline{M'T}^2 : \overline{CN}^2 :: \text{aire } P'TM' : \text{aire } pCN$$
$$:: \text{aire } P'TM' : \text{aire } CP'M' :: TP' : CP'$$
$$:: M'T : M't;$$

en observant que les triangles semblables M′TP′, CTt donnent la proportion

$$CT : TP' :: Tt : TM', \quad \text{d'où} \quad CP' : TP' :: tM' : TM'.$$

donc on a la propriété

$$\overline{CN}^2 = M'T \times M't.$$

Corollaire Ier. Si sur Tt, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, elle passera par le centre C de l'hyperbole, qui est le sommet de l'angle droit : donc (Géom.)

$$M'C \times M'I = M'T \times M't = \overline{CN}^2;$$

ainsi la différence CI entre la troisième proportionnelle $M'I = \frac{\overline{CN}^2}{M'C}$ et le demi-diamètre $M'C$, est une corde dans le cercle qui, ayant son centre sur la tangente $M't$, passe par les points T et t d'intersection de cette tangente avec les axes.

Corollaire II. Nous pouvons maintenant décrire une hyperbole, connaissant les demi-diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entr'eux. A cet effet, on portera la troisième proportionnelle $M'I = \frac{\overline{CN}^2}{M'C}$ sur le premier demi-diamètre $M'C$, on mènera par M' une droite indéfinie $M'Tt$ parallèle à CN; on élevera par le milieu de CI une perpendiculaire jusqu'à la droite $M'Tt$, et la circonférence décrite de ce point de rencontre comme centre, avec sa distance au point C, donnera les points T et t qui sont sur les axes principaux : menant alors les droites CT et Ct, et du point M' sur leurs prolongemens, les perpendiculaires $M'P'$, $M'Q$, on prendra une moyenne proportionnelle CA entre CP' et CT, une autre CB entre $CQ = P'M'$ et Ct, et on aura ainsi les deux demi-axes principaux de la courbe.

155. Théorème X. *La droite* $M'N$ *menée du point de contact* M' *parallèlement à l'asymptote* CS, *passe par l'extrémité* N *du demi-diamètre* CN *conjugué de* CM' (fig. 136).

En prolongeant l'ordonnée $P'M'$ jusqu'à la rencontre en L de l'asymptote CS, les triangles semblables CAb, $CP'L$, donnent $CA : Ab :: CP' : P'L$, et comme $Ab = B$, cette pro-

portion donne $P'L = \frac{Bx'}{A}$. Les triangles CP'L, P'M'O, semblables à cause de M'N parallèle à CS, donnent

$$P'L : P'M' :: CP' : OP',$$

c'est-à-dire,

$$\frac{Bx'}{A} : \frac{B}{A}\sqrt{x'^2 - A^2} :: x' : OP', \quad \text{d'où} \quad OP' = \sqrt{x'^2 - A^2} :$$

or en prenant sur M'N, à compter du point O une longueur $ON = CL$, et du point N abaissant sur l'axe la perpendiculaire Np, les triangles OpN, CP'L parfaitement égaux, par construction, donnent $Op = CP'$, et retranchant de part et d'autre la partie commune CO, il reste $Cp = OP' = \sqrt{x'^2 - A^2}$: les mêmes triangles donnent aussi $pN = P'L = \frac{Bx'}{A}$, et on a vu (153) que ces côtés Cp et pN sont ceux d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse CN est le demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit au point M'. Donc, etc.

Corollaire. On peut donc, au moyen des asymptotes, déterminer de grandeur et de position le diamètre conjugué de celui qui aboutit au point M', et conséquemment trouver la direction de la tangente en ce point M'.

156. Théorème XI. *La parallèle* M'N *à l'asymptote* CS, *est divisée également en* O *par l'autre asymptote* CS' (fig. 136).

Soit CB le demi-second axe de l'hyperbole ; la ligne Ab' est égale et parallèle à CB ; la diagonale AB du rectangle ACBb' est parallèle à l'asymptote CS, et par conséquent à la droite M'N : or l'asymptote Cb', autre diagonale du même rectangle, coupe la première également en Z ; donc elle coupe de la même manière OE en R ; donc $ER = OR$; mais à cause de $ON = CL$, par construction (155), et de M'L parallèle à CE, on a $ON = M'E$; donc $ON - OR = M'E - ER$, c'est-à-dire, $NR = M'R$.

Corollaire Ier. Si l'on prolonge le demi-diamètre CN jusqu'à la rencontre en n d'une parallèle M'n à CS', à cause de $NR = M'R$, on aura $Cn = CN$: donc deux parallèles M'N, M'n

aux asymptotes, menées du point de contact, passent par les extrémités du diamètre conjugué de celui qui aboutit à ce point.

Corollaire II. Les triangles RCN, RTM′ semblables, à cause de CN parallèle à M′T, sont de plus égaux, à cause de M′R = RN ; donc M′T = CN ; mais si l'on prolonge la tangente TM′ jusqu'à la rencontre en *t* de l'asymptote CS, on a aussi M′*t* = CN, parce que M′Q = CR, et que d'ailleurs les triangles *t*M′Q et CNR sont semblables, comme ayant tous leurs côtés parallèles : donc la tangente T*t* est divisée également au point M′ de contact, proposition démontrée (152), et conséquemment T*t* est le conjugué de N*n*.

Corollaire III. Il est maintenant facile de déterminer les deux asymptotes d'une hyperbole dont on connaît les demi-diamètres conjugués CN, CM′, et l'angle NCM′ : à cet effet, on mènera par le point M′, la droite T*t* parallèle au conjugué CN, et prenant de chaque côté du point M′ les parties M′T, M′*t* égales chacune à CN, les droites CT, C*t*, indéfiniment prolongées, seront les asymptotes de l'hyperbole qui doit passer par le point M′.

Corollaire IV. L'égalité des triangles RCN, RTM′, donne encore RC = RT ; donc, en menant d'un point M′ à l'une des asymptotes, une droite M′R parallèle à l'autre asymptote, et prenant sur la première RT = CR, M′T sera tangente au point M′.

Corollaire V. Concevons une tangente T*t* parallèle à la transversale HH′ (fig. 137), le diamètre CM′ mené au point de contact, coupera la tangente T*t* en deux parties égales en M′; elle coupera de même la parallèle HH′; mais elle coupera aussi la corde GG′ également en P (chap. VIII); donc HG = H′G, propriété démontrée (149), et qui sert à construire l'hyperbole, lorsqu'on a l'un de ses points et ses asymptotes.

157. Problème IX. *Décrire une hyperbole qui passe par trois points donnés, et dont les asymptotes soient parallèles à deux droites données* (fig. 138).

Soient *m*, P, *n* les trois points donnés, et CS, CS′ les

asymptotes qui doivent être parallèles à deux lignes données : on connaît les directions des droites md, PG parallèles aux asymptotes, de PA parallèle à CS, et la position de la droite mn.

Par la propriété fondamentale de l'hyperbole rapportée aux asymptotes CS, CS', on a

$$CQ \times Qm = CG \times GP,$$

CQ, Qm étant les coordonnées du point m, CG et GP celles du point P : de là on déduit la proportion

$$dm : PG :: de : Ge;$$

la construction donne

$$PG : aM :: Ge : mM,$$
$$mN : md :: Nb : de;$$

ces proportions multipliées par ordre, donneront, en réduisant, d'après la précédente,

$$mN : Ma :: Nb : mM,$$

d'où

$$Ma \times Nb = mN \times mM.$$

On aurait semblablement

$$Ma \times Nb = nM \times nN,$$

ce qui fournit déjà un théorème assez remarquable.

Maintenant la proportion

$$mN : Ma :: Nb : mM$$

donne

$$mN - Ma : Nb - mM :: Ma : mM,$$

et en faisant attention que $mM = nN$ (149 et 156), cette proportion devient

$$mn - ma : nb :: Ma : Mm :: GP : Ge,$$

c'est-à-dire,

$$na : nb :: GP : Ge,$$

d'où l'on déduit

$$na - nb : na :: GP - Ge : GP,$$

c'est-à-dire,

$$ab : an :: Pe : PG \ldots\ldots (1).$$

Si l'on mène par n une parallèle nf à CS′, coupant PH en f, on aura aussi

$$ba : bm :: Pf : PH \ldots\ldots (2).$$

Cela posé, m, P, n étant les trois points donnés, par P soient menées des parallèles AH, BG aux droites données, et conséquemment aux asymptotes : soient menées mn coupant PA, PB en a et b, et parallèlement aux mêmes droites, les droites me, nf rencontrant en e et f les prolongemens de PB et PA; alors les trois premiers termes des proportions (1) et (2) étant connus, on pourra déterminer PG, PH, et conséquemment les points G et H par lesquels menant des parallèles CS, CS′ aux droites données, on aura les asymptotes de la courbe dont la construction par points est facile.

158. Nous terminerons par la solution de deux questions.

Problème X. *Un point étant donné dans le plan d'une hyperbole, soit intérieurement, soit extérieurement, on propose de mener par ce point une perpendiculaire à l'hyperbole, laquelle le sera à la tangente au point où aboutit la plus courte distance* (fig. 139).

M′ étant le point donné, et M′M la plus courte distance du point M′ à la courbe, il s'agit de trouver l'abscisse du point M. Les triangles semblables MmM′, PMT donnent

$$Mm : M'm :: PM : PT = \frac{y(y'-y)}{x+x'},$$

y et x désignant les coordonnées AP, PM du point M, et x', y' celles AP′, P′M′ du point donné M′. Mais la soutangente PT, pour l'origine au sommet, est

$$PT = \frac{xx + 2Ax}{A + x},$$

comme on le trouve en remplaçant x' par $A + x$ dans l'expression $\frac{x'^2 - A^2}{x'}$ de la soutangente pour le centre; donc

l'équation de l'hyperbole au sommet

$$y^2 = \frac{p}{A}(xx + 2Ax) \ldots\ldots (1),$$

où $p = \frac{B^2}{A}$ (139), devient

$$y^2 = \frac{p}{A}(A + x) \,.\, PT;$$

donc

$$y = \frac{p}{A}(A + x)\frac{(y' - y)}{x + x'}:$$

on tire de là

$$y = \frac{py'(A + x)}{A(x + x') + p(A + x)} = \frac{py'(A + x)}{kA + lx},$$

après avoir fait $x' + p = k$, $A + p = l$. Cette valeur mise en place de y dans (1) donne, après avoir posé

$$m = \frac{Ak}{l}, \qquad n^2 = \frac{Apy'^2}{l^2};$$

cette équation

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 2A \\ \quad + 2m \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^3 + 4Am \\ \quad + m^2 \\ \quad - n^2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^2 + 2Am^2 \\ \quad - 2An^2 \end{array}\right| x - A^2n^2 = 0,$$

qui admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative (Alg., Ire sect.), et conséquemment la question admet au moins deux solutions.

Problème XI. *Trouver le lieu des sommets d'une suite de triangles ayant la même base* AB, *et dont les deux angles* DAB, DBA, *sur cette base, aient une différence donnée* (fig. 140).

On prendra pour axe des abscisses la ligne MPQ passant par le milieu P de AB, et faisant avec la base les angles APQ, BPM égaux chacun à la moitié de la différence des angles à la base : cette droite fera avec DA et DM, les angles DQM, DMQ égaux : en effet, QPA = BPM; et comme chacun

de ces angles est la moitié de la différence DBP, DAP; on aura

$$\mathrm{DBP} - \mathrm{DAP} = \mathrm{QPA} + \mathrm{BPM},$$

d'où

$$\mathrm{DBP} = \mathrm{DAP} + \mathrm{QPA} + \mathrm{BPM};$$

mais

$$\mathrm{DBP} = \mathrm{BMP} + \mathrm{BPM},$$

donc

$$\mathrm{BMP} = \mathrm{DAP} + \mathrm{QPA},$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{DMQ} = \mathrm{DQM}.$$

Abaissons les perpendiculaires BN, AR, DO sur l'axe MQ, et soient $\mathrm{PO} = x$, $\mathrm{DO} = y$, $\mathrm{AR} = \mathrm{BN} = b$, $\mathrm{PR} = \mathrm{PN} = c$: les triangles semblables BNM, DOM donnent

$$\mathrm{BN} : \mathrm{DO} :: \mathrm{MN} : \mathrm{MO},$$

d'où

$$\mathrm{DO} - \mathrm{BN} : \mathrm{DO} :: \mathrm{MO} - \mathrm{MN} : \mathrm{MO} = \frac{cy + xy}{y - b}.$$

en observant que

$$\mathrm{MO} - \mathrm{MN} = \mathrm{NO} = \mathrm{NP} + \mathrm{PO} = c + x.$$

De même les triangles semblables ARQ, DOQ donnent

$$\mathrm{AR} : \mathrm{DO} :: \mathrm{RQ} : \mathrm{QO},$$

d'où

$$\mathrm{DO} + \mathrm{AR} : \mathrm{DO} :: \mathrm{QO} + \mathrm{RQ} : \mathrm{QO} = \frac{cy - xy}{y + b}.$$

Mais à cause des angles égaux DMQ, DQM, on a $\mathrm{MO} = \mathrm{QO}$, et conséquemment,

$$\frac{cy + xy}{y - b} = \frac{cy - xy}{y + b},$$

et réduisant,

$$xy = -bc,$$

équation de l'hyperbole aux asymptotes. (*Arith. univ.* de *Newton.*)

CHAPITRE XIV.

De la génération des lignes du second degré par l'intersection de deux lignes droites ; de quelques propriétés des tangentes, et applications de la doctrine des projections à la recherche des principales propriétés de l'ellipse.

159. SOIENT (fig. 141) deux droites AM, A'M assujéties à tourner autour des points fixes A et A', sous un angle variable AMA' : la nature de la courbe décrite par le point M dépendra des conditions auxquelles on soumettra l'inclinaison respective des deux génératrices sur l'axe des x.

Nous prendrons, pour plus de simplicité, l'origine au milieu C de la droite AA', et nous supposerons les coordonnées rectangulaires. Soit $AC = A$: les droites AM, A'M auront pour équations

$$y = \alpha(x - A), \qquad y = \alpha'(x + A),$$

α et α' étant les tangentes trigonométriques des angles MAX, MA'X. La relation entre les coordonnées du point M sera exprimée par

$$y^2 = \alpha\alpha'(x^2 - A^2) = -\alpha\alpha'(A^2 - x^2)\ldots\ldots(1),$$

et elle présentera deux cas, suivant que les facteurs α, α' seront de signes contraires ou de même signe, c'est-à-dire, suivant que le produit $\alpha\alpha'$ sera négatif ou positif.

Menons les perpendiculaires LL, ll aux points A et A' de la droite AA' : nous supposerons d'abord, pour rentrer dans

le premier cas, que les lignes génératrices se rencontrent toujours entre LL et ll : ces perpendiculaires seront, dans le sens des x, les limites de la courbe entièrement comprise entr'elles.

Posant donc, dans ce cas,

$$-\alpha\alpha' = \frac{B^2}{A^2},$$

l'équation (1) deviendra

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

c'est-à-dire, celle d'une ellipse dont les axes sont 2A et 2B : comme le produit $\alpha\alpha'$ est négatif, le demi-axe B, donné par

$$B = A\sqrt{\alpha\alpha'} \ldots\ldots (2),$$

sera réel. Dans le cas particulier de $\alpha\alpha' = -1$, on aurait $B = A$, et l'ellipse deviendrait un cercle.

On a pour l'ellipse (101), en observant que α est < 0,

$$\text{tang}\,M = -\frac{\alpha'+\alpha}{1-\alpha\alpha'} \ldots\ldots (3),$$

en même temps que

$$B = A\sqrt{\alpha\alpha'}:$$

ainsi suivant que l'une ou l'autre de ces relations

$$\alpha\alpha' < 1, \quad \alpha\alpha' > 1,$$

aura lieu, c'est-à-dire, suivant que l'angle M sera obtus ou aigu, on conclura de (2),

$$B < A, \quad B > A:$$

l'ellipse sera donc décrite sur son grand axe, dans le premier cas, et sur son petit axe, dans le second.

La droite A'M s'inclinant de plus en plus, viendra enfin coïncider avec A'A, et α' devenant zéro, on aura $\alpha = \infty$, c'est-à-dire qu'alors AM se confondra avec LL : ainsi A est un point de la courbe : on en dirait autant de A'.

Qu'on suppose actuellement le produit $\alpha\alpha'$ positif, ou, ce qui revient au même, les facteurs α et α' affectés du même signe : les droites AM et A′M étant constamment inclinées dans le même sens, leur point de concours N′ se trouvera hors des parallèles LL, ll, qui seront encore des limites de la courbe, mais de manière que cette courbe qui d'ailleurs passera toujours par les points A et A′, n'aura aucun de ses points entre LL et ll.

Posant alors

$$\alpha\alpha' = \frac{B^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad B = A\sqrt{\alpha\alpha'},$$

l'équation (1) deviendra

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

équation d'une hyperbole dont le premier et le second axe sont 2A et 2B.

Si l'on avait $\alpha\alpha' = 1$, il en résulterait $B = A$, et l'hyperbole serait équilatérale.

160. On sait que les droites Cm, Cn (fig. 142), menées par le centre de l'ellipse, respectivement parallèles aux cordes A′M, AM, que nous avons nommées *supplémentaires*, et qui coupent ces cordes dans leurs milieux l et k, forment un système de demi-diamètres coujugués dans l'ellipse, et que la même construction donne ceux de l'hyperbole.

Soient $cp = x$, $pm = y$ les coordonnées du point m ; l'équation du diamètre Cm parallèle à A′M, sera

$$y = \alpha' x, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \alpha'^2 x^2;$$

portant cette valeur dans l'équation (1), on en tirera

$$x^2 = \frac{\alpha A^2}{\alpha - \alpha'}, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{\alpha'^2 \alpha A^2}{\alpha - \alpha'};$$

donc

$$\overline{Cm}^2 = x^2 + y^2 = \frac{\alpha A^2 + \alpha'^2 \alpha A^2}{\alpha - \alpha'} \ldots\ldots (4).$$

Par un calcul semblable, on trouvera

$$\overline{Cn}^2 = \frac{-\alpha' A^2 - \alpha^2\alpha' A^2}{\alpha - \alpha'} \ldots\ldots (5),$$

et de là

$$\overline{Cm}^2 + \overline{Cn}^2 = (1 - \alpha\alpha') A^2;$$

désignant donc par A′ et B′ les demi-diamètres conjugués Cm, Cn, et observant que $-\alpha\alpha' A^2 = B^2$, il viendra

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2,$$

propriété démontrée (66).

Le calcul est absolument le même pour l'hyperbole, sauf le signe du produit $\alpha\alpha'$, et, pour cette courbe, on est conduit à la propriété

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2,$$

démontrée (72).

Les valeurs (4) et (5) de $\overline{Cm}^2 = A'^2$, $\overline{Cn}^2 = B'^2$ donnent

$$A' = A\sqrt{\frac{(1+\alpha'^2)\alpha}{\alpha - \alpha'}}, \quad B' = A\sqrt{-\frac{(1+\alpha^2)\alpha'}{\alpha - \alpha'}};$$

or en désignant par φ l'angle M entre les cordes supplémentaires, le même que l'angle entre les demi-diamètres A′ et B′, on a, d'après l'expression (3),

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}} = \frac{-(\alpha+\alpha')}{\sqrt{(1-\alpha\alpha')^2 + (\alpha'+\alpha)^2}}$$
$$= -\frac{(\alpha+\alpha')}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\alpha'^2)}};$$

mais

$$A'B' = A^2 \times \frac{\sqrt{-(1+\alpha^2)(1+\alpha'^2)\alpha\alpha'}}{\alpha - \alpha'}$$
$$= -A^2 \times \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\alpha'^2)\alpha\alpha'}}{(\alpha+\alpha')},$$

en observant que, pour l'ellipse, la tangente α est négative;

donc

$$A'B' \sin \varphi = A^2 \sqrt{\alpha\alpha'} = AB.$$

Le calcul est exactement le même pour l'hyperbole. On retrouve ainsi les propriétés obtenues par une autre voie (66 et 72).

161. Si on emploie l'équation (1) sans changer le signe de $\alpha\alpha'$, auquel cas elle représente une hyperbole, on pourra la mettre sous la forme

$$y = \pm x \sqrt{\alpha\alpha'\left(1 - \frac{A^2}{x^2}\right)},$$

qui annonce le caractère asymptotique de cette courbe, puisque son équation tend à se changer en celle-ci

$$y = \pm x \sqrt{\alpha\alpha'},$$

à mesure que l'abscisse x augmente; mais l'abscisse x devenant infinie, les droites génératrices deviennent parallèles, et alors $\alpha' = \alpha$; ensorte que l'équation précédente devient

$$y = \pm \alpha x = \pm \frac{B}{A} x,$$

et elle représente les asymptotes de la courbe (73 et 147).

162. Portons l'origine des abscisses au point A' : les équations des deux génératrices $A'M$, AM seront

$$y = \alpha' x, \quad y = \alpha(x - 2A),$$

d'où l'on conclura cette relation entre les coordonnées du point M,

$$y^2 = -\alpha\alpha'(2Ax - xx),$$

et, sous l'hypothèse

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad -2\alpha\alpha' = \frac{2B^2}{A^2},$$

l'équation de l'ellipse sera

$$y^2 = \frac{2B^2}{A}x + \alpha\alpha' x^2:$$

la quantité $\frac{2B^2}{A}$ est, comme on l'a vu (103), le paramètre de l'ellipse, que nous désignerons par $2p$, ensorte que

$$y^2 = 2px + \alpha\alpha' x^2;$$

que l'on suppose $\alpha = 0$, et on conclura de l'équation (2), $A = \infty$, ce qui exprime le passage de l'ellipse à la parabole (124); dans ce cas, l'équation précédente se change dans celle-ci

$$y^2 = 2px,$$

qui est celle de la parabole dont nous allons nous occuper.

163. Soient F (fig. 143) un point fixe pris sur l'axe AX, Ff une droite mobile assujétie à passer constamment par ce point F, Tt une autre droite mobile coupant la première en M et l'axe en T : soit menée l'ordonnée MP du point variable M. Supposons que le mouvement de la droite Tt soit lié à celui de Ff autour du point fixe F, de manière qu'on ait constamment

$$\text{angl. FMT} = \text{angl. FTM}, \quad AP = AT:$$

en posant $AF = p$, les équations des deux droites Tt et Ff seront de la forme

$$(1)\ldots\ldots y = ax + b, \quad y = a'(x - p)\ldots\ldots(2),$$

les coordonnées x et y étant rapportées à l'origine A. L'abscisse AP est la valeur de x, tirée de l'égalité des seconds membres des équations (1) et (2) : on trouve ainsi

$$x = AP = \frac{b + a'p}{a' - a},$$

la valeur de AT est celle de x correspondante à $y = 0$

dans (1) : on a donc

$$AT = -\frac{b}{a},$$

on sait d'ailleurs que

$$\text{tang FMT} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Or suivant les conditions du problème, 1°. les deux lignes AP et AT doivent être égales et de signes contraires; 2°. la tangente de l'angle FMT doit être égale à celle de l'angle FTM, c'est-à-dire, égale à a. Ainsi on aura entre les trois constantes a, a', b, les deux équations

$$(3)\ldots\ldots \frac{b + a'p}{a' - a} = \frac{b}{a}, \quad \frac{a' - a}{1 + aa'} = a\ldots\ldots(4).$$

Si donc entre les équations (1), (2), (3) et (4) on élimine a, a', b, l'équation résultante en x, y et p sera celle du lieu des points M, pour toutes les positions des droites Tt, Ff, suivant les conditions de l'énoncé.

On exécutera facilement cette élimination, comme il suit : on multipliera l'une par l'autre les équations (3) et (4), ce qui donnera, après les réductions,

$$ba = p\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5);$$

chassant les dénominateurs dans l'équation (3), et réduisant d'après l'équation (5), il vient

$$2p = a'(b - ap)\ldots\ldots(6);$$

éliminant a' entre les équations (6) et (2), on trouve

$$2p(x - p) = y(b - ap)\ldots\ldots(7):$$

si entre cette équation et l'équation (1) on élimine successivement b et a, on obtient

$$a = \frac{y^2 - 2p(x-p)}{y(x+p)}, \quad b = p \times \frac{y^2 + 2x(x-p)}{y(x+p)}:$$

ces valeurs substituées dans (5) donnent, après les réductions,

$$[y^2 + (x-p)^2]\,(y^2 - 4px) = 0:$$

du premier facteur égalé à zéro, on déduit

$$y^2 + (x-p)^2 = 0,$$

égalité qui ne peut être satisfaite que par $y=0$ et $x-p=0$, d'où $x=p$, ce qui donne le foyer F. L'autre facteur égalé à zéro, c'est-à-dire,

$$y^2 = 4px = 0,$$

représente la parabole.

164. L'inclinaison de la droite T*t* étant donnée, il ne peut y avoir qu'une seule direction de FM pour laquelle la condition ang. FMT = ang. FTM soit satisfaite : donc la droite T*t* n'a que le seul point M commun avec la courbe, et lui est conséquemment tangente en ce point ; et comme on a, par construction,

$$\text{ang. FMT} = \text{ang. FTM} = \text{ang. NMT},$$

il faut en conclure que, *dans la parabole, la tangente en un point divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur et une parallèle à l'axe menée par ce même point.* Enfin de ce que AT = AP, *on voit que, dans cette courbe, la soutangente est double de l'abscisse.*

Menons l'ordonnée FM′ par le foyer F, et par M′ la perpendiculaire M′N′ = M′F à QS perpendiculaire à l'axe AX : le quadrilatère FMNQ se changera dans le carré FM′N′Q, et la tangente en M′, qui en sera la diagonale, viendra passer par Q, à cause de FM′Q = QM′N′: on aura donc

$$\text{FM}' = \text{FQ} = 2\text{AF}.$$

Ainsi, *dans la parabole, l'ordonnée qui répond au foyer, est double de la distance de ce foyer au sommet; la tangente à l'extrémité de cette ordonnée, fait avec elle un demi-angle droit, et passe par l'intersection de l'axe de la courbe avec sa directrice.*

165. Si l'on désigne par x', y' les coordonnées d'un point quelconque M, l'équation de la droite TM sera

$$y - y' = a(x - x');$$

substituant pour a sa valeur trouvée (163), on aura

$$y - y' = \frac{y'^2 - 2p(x' - p)}{y'(x' + p)}(x - x'),$$

remplaçant y'^2 par $4px'$, et réduisant,

$$y - y' = \frac{2p}{y'}(x - x'),$$

qu'on sait être l'équation de la tangente (130), en observant qu'ici nous appelons p ce que nous avons désigné par $2p$ (chap. XII).

166. L'équation de toute corde Dd parallèle à cette tangente, sera donc

$$y = \frac{2p}{y'}x + d;$$

on obtiendra les coordonnées des extrémités de cette corde, en combinant cette équation avec celle de la courbe

$$y^2 = 4px:$$

l'élimination de x entre ces deux équations donne

$$y^2 - 2y'y + dy' = 0;$$

la somme des ordonnées des extrémités de la corde est donc $2y'$; la moitié de cette somme, c'est-à-dire, l'ordonnée du milieu de la corde, est donc $y' = \text{MP}$; cette corde a donc son milieu i sur la parallèle MX' à l'axe menée par le point M. Ainsi, dans la parabole, toute parallèle à l'axe principal est un diamètre de la courbe.

Ce qui précède fait voir combien un heureux choix des données, dans la génération des courbes, peut faciliter la déduction de leurs diverses propriétés.

167. *Si deux droites touchant continuellement une même*

ellipse, se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques des angles qu'elles forment avec l'un des axes, soit constant, le point d'intersection de ces deux droites décrira une ligne du second degré, concentrique à l'ellipse proposée, et dont les axes seront parallèles à ceux de cette ellipse : en général, cette ligne du second degré sera une ellipse ou une hyperbole, suivant que le produit constant sera positif ou négatif; dans les deux cas, le rapport des deux axes de la courbe décrite, sera la racine carrée du produit.

Soit
$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$
l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes principaux : soient de plus,
$$y = ax + b, \quad y = a'x + b',$$
les équations de deux droites quelconques : pour dire que chacune de ces droites est tangente à la courbe, on remplacera dans son équation, y par sa valeur $ax + b$, et $a'x + b'$, et après avoir résolu par rapport à x, l'équation résultante, on égalera à zéro la quantité sous le radical, ce qui donnera ces conditions,
$$A^2a^2 + B^2 = b^2, \quad A^2a'^2 + B^2 = b'^2,$$
qui reviennent à celles-ci,
$$A^2a^2 + B^2 = y^2 - 2axy + a^2x^2,$$
$$A^2a'^2 + B^2 = y^2 - 2a'xy + a'^2x^2,$$
en remplaçant b et b' par leurs valeurs tirées des équations des droites, pour dire qu'elles sont variables de position : on en déduit celles-ci
$$a^2 + \frac{2xy}{A^2 - x^2}\,a + \frac{B^2 - y^2}{A^2 - x^2} = 0,$$
$$a'^2 + \frac{2xy}{A^2 - x^2}\,a' + \frac{B^2 - y^2}{A^2 - x^2} = 0;$$
d'où l'on voit que les valeurs de a et a' sont les deux racines

de l'une de ces équations : donc

$$aa' = \frac{B^2 - y^2}{A^2 - x^2} \ldots\ldots (1).$$

Si l'on suppose le produit aa' constant et négatif, la relation (1) sera

$$y^2 + aa'x^2 = B^2 + aa'A^2 \ldots\ldots (2),$$

équation d'une ellipse concentrique à la première, puisque l'origine des coordonnées est restée la même, et dont les demi-axes A′ et B′ qui ont même direction que les axes primitifs, sont donnés par

$$A'^2 = \frac{B^2 + aa'A^2}{aa'}, \quad B'^2 = B^2 + aa'A^2 \ldots (3),$$

valeurs de x et de y déduites de (2), sous les hypothèses $y = 0$ et $x = 0$: le rapport de ces axes sera

$$\frac{B'}{A'} = \sqrt{aa'}.$$

Si l'on suppose, au contraire, le produit aa' constant, mais positif, l'équation (1) deviendra

$$y^2 - aa'x^2 = B^2 - aa'A^2 \ldots\ldots (4),$$

équation d'une hyperbole concentrique à l'ellipse proposée, et dont les demi-axes A′ et B′ suivant les mêmes directions que les axes primitifs, sont donnés par

$$A'^2 = -\frac{B^2 - aa'A^2}{aa'}, \qquad B'^2 = B^2 - aa'A^2;$$

d'où l'on déduit ce rapport des demi-axes,

$$\frac{B'}{A'} = \sqrt{aa'},$$

en observant que des deux quantités A′ et B′, l'une est réelle, et l'autre est imaginaire.

168. *Si l'on conçoit deux tangentes à l'ellipse de l'équation (2), mobiles comme les premières, et assujéties aux mêmes conditions qu'elles, l'intersection de ces droites décrira une troisième ellipse de laquelle, par le même procédé, on déduira une quatrième ellipse, et ainsi de suite.* Cela posé, 1°. *toutes les ellipses construites sur la première, seront semblables entre elles, concentriques, et leurs axes auront mêmes directions que les siens;* 2°. *les aires de ces ellipses formeront une progression dont le facteur constant sera* $=2$; 3°. *les deux tangentes dont l'intersection décrira l'une quelconque de ces ellipses, seront continuellement parallèles à deux cordes supplémentaires de l'ellipse qui la précédera immédiatement, dans l'ordre de leur génération successive.*

Si à l'ellipse de l'équation (2), et dont les axes sont déterminés par les équations (3), on mène deux tangentes, de manière que le produit aa' soit le même en nombre et en signe, la courbe décrite par l'intersection de ces tangentes, sera une ellipse dont les demi-axes A'' et B'' seront donnés par

$$A''^2 = \frac{B'^2 + aa'A'^2}{aa'}, \quad B''^2 = B'^2 + aa'A'^2;$$

mettant pour B'^2 et A'^2 leurs valeurs (3), il viendra

$$A''^2 = \frac{2(B^2 + aa'A'^2)}{aa'} = 2A'^2, \quad B''^2 = 2(B^2 + aa'A^2) = 2B'^2.$$

Si, suivant les mêmes conditions, on cherche le lieu de l'intersection de deux tangentes menées à cette troisième ellipse, on en déterminera une quatrième pour laquelle on aura

$$A'''^2 = 2A''^2, \qquad B'''^2 = 2B''^2,$$

et ainsi de suite : donc

$$\sqrt{aa'} = \frac{B'}{A'} = \frac{B''}{A''} = \frac{B'''}{A'''} = \text{etc.}$$

Les demi-axes étant dans le même rapport, la première partie de l'énoncé est démontrée : pour prouver la seconde, il faut

admettre cette proposition que nous démontrerons incessamment, savoir, que l'aire de l'ellipse est égale à $\pi.A.B$, π désignant la circonférence dont le diamètre $=1$, et A et B les deux demi-axes : on a donc pour les aires des ellipses successives,

$$\pi.A'.B',\quad \pi.A''.B'',\quad \pi.A'''.B''',\quad \text{etc.},$$

c'est-à-dire,

$$\pi.A'.B',\quad 2\pi.A'B',\quad 4\pi.A'B',\quad 8\pi.A'B',\quad \text{etc.}$$

Enfin les relations $aa' = \frac{B'^2}{A'^2} = \frac{B''^2}{A''^2} =$ etc. conviennent aux cordes supplémentaires parallèles aux tangentes (106), en observant qu'ici le produit aa' est négatif.

169. Considérons quelques cas particuliers. Soit 1°. $aa' = -1$; cette substitution faite dans (1), et qui revient à celle de $aa' = 1$ dans (2), donne

$$y^2 + x^2 = A^2 + B^2,$$

d'où l'on conclut que *si les deux côtés d'un angle droit mobile, sont continuellement tangens à une même ellipse, son sommet décrira un cercle concentrique à cette ellipse, et ayant pour rayon la corde qui joint l'une des extrémités du grand axe à l'une des extrémités du petit.*

Soit, 2°. $aa' = +1$: l'équation (4) deviendra

$$y^2 - x^2 = -(A^2 - B^2).$$

Ainsi *le lieu des points d'intersection des deux tangentes mobiles, est une hyperbole équilatère.*

Soit, 3°. $aa' = \frac{B^2}{A^2}$: l'équation (1) donnera

$$y = \pm \frac{B}{A}x,$$

c'est-à-dire qu'on aura pour le lieu géométrique cherché, les diagonales du rectangle des axes.

170. Enfin, pour la parabole, on serait conduit à ce théorème : *Si deux droites mobiles touchant continuellement une parabole, se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques de leur inclinaison à l'axe principal de cette parabole, soit constant, le lieu des intersections de ces deux droites, sera une droite indéfinie perpendiculaire à cet axe, laquelle deviendra la directrice de la parabole, si les deux tangentes sont constamment perpendiculaires l'une à l'autre.*

171. On peut encore appliquer la doctrine des projections à la recherche des principales propriétés de l'ellipse (*).

Concevons un cercle dans un plan quelconque non horizontal, et par le diamètre horizontal de ce cercle, faisons passer un plan horizontal sur lequel le cercle se projette par des perpendiculaires : tout diamètre de la projection, est la projection d'un diamètre du cercle. Il s'agit d'abord de trouver l'équation de la courbe de projection du cercle.

Désignons par a le rayon du cercle, par θ l'angle entre son plan et celui de la projection horizontale : si par le centre du cercle, on mène un rayon perpendiculaire au diamètre horizontal, sa projection horizontale sera évidemment $a \cos \theta$, que nous désignerons par b. Prenons l'origine des coordonnées au centre du cercle, le diamètre horizontal pour axe des x, et la projection horizontale $a \cos \theta$ pour axe des y; ces deux axes seront à angles droits dans la courbe de projection : or, x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe de projection, celles du point correspondant de la courbe projetée, seront x et $\frac{y}{\cos \theta}$, en observant que les deux points correspondans des deux courbes ont même abscisse, et que l'une des ordonnées est la projection de l'autre. Or par la propriété du cercle, on a

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\theta} = a^2, \quad \text{d'où} \quad x^2\cos^2\theta + y^2 = a^2 \cos^2 \theta,$$

(*) Voyez les notions données dans le seizième chapitre.

et en multipliant par a^2,

$$a^2x^2\cos^2\theta + a^2y^2 = a^4\cos^2\theta :$$

remplaçant $a^2\cos^2\theta$ par b^2, on trouve enfin,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

La projection horizontale d'un cercle est donc une ellipse.

172. Si dans l'ellipse on mène sous une inclinaison quelconque, tant de cordes parallèles qu'on voudra, les cordes du cercle dont elles sont les projections, seront aussi parallèles; ces dernières auront donc leurs milieux sur un même diamètre perpendiculaire à leur direction commune, et les tangentes aux extrémités de ce diamètre, seront parallèles à ces cordes : les projections tant de ce diamètre que des tangentes, seront un diamètre et des tangentes à l'ellipse : ce diamètre de l'ellipse passera donc par les milieux des cordes parallèles, et les tangentes à ses extrémités seront parallèles à ces cordes. En effet, CR (fig. 144) étant l'intersection du plan du cercle et du plan de l'ellipse, mn une corde dans le cercle, M son milieu, $m'n'$ la projection de mn, M′ la projection de M, les cordes mn, $m'n'$ se rencontrent en R, et il est clair que M′ est le milieu de $m'n'$, comme M est le milieu de mn. De cette propriété résulte le moyen de déterminer le centre d'une ellipse (86). Réciproquement tout diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales un système de cordes parallèles.

Parmi toutes les cordes parallèles qu'un même diamètre de l'ellipse partage également, il en est une qui, passant par le centre, est elle-même un diamètre : les diamètres du cercle dont ceux-là sont les projections, étant perpendiculaires entre eux, les tangentes aux extrémités de chacun d'eux, sont parallèles à l'autre; il en est de même des projections de ces tangentes à l'égard des projections des diamètres. Ainsi, *dans l'ellipse, un diamètre étant mené arbitrairement, on en peut toujours mener un second, de manière que les tangentes aux extrémités de chacun d'eux, soient parallèles à l'autre.* Deux

diamètres ainsi disposés et dont chacun partage en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont nommés *diamètres conjugués.*

Pour que deux diamètres conjugués de l'ellipse soient égaux entr'eux, il faut que les diamètres rectangulaires du cercle, dont ils sont les projections, soient également inclinés sur le plan de l'ellipse; ils doivent donc être également inclinés à la commune section des plans des deux courbes. De là on conclut que les deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse, doivent être dirigés suivant les diagonales du carré circonscrit dont deux côtés opposés sont parallèles, et les deux autres perpendiculaires au grand axe de l'ellipse. Donc, *dans l'ellipse, les diamètres conjugués égaux, sont dirigés suivant les diagonales du rectangle circonscrit dont les côtés sont parallèles aux deux axes* (67).

173. Nous démontrerons dans l'un des chapitres suivans, que l'aire de la projection de toute figure plane sur un plan incliné au sien, est le produit de l'aire de la figure qu'on projette, par le cosinus de l'inclinaison des deux plans.

Soit circonscrit à l'ellipse un parallélogramme dont les côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués : ce parallélogramme sera, comme on l'a démontré, la projection d'un carré circonscrit au cercle : l'aire de ce carré étant $4a^2$, celle du parallélogramme sera

$$4a^2 \cos\theta = 4ab = 2a \times 2b,$$

à cause de $a \cos\theta = b$: ce qui ramène à la propriété démontrée (66).

L'aire du cercle est πa^2 : ainsi en désignant par E l'aire de l'ellipse, on aura

$$E = \pi a^2 \cos\theta = \pi ab = \pi\ (\sqrt{ab})^2.$$

L'aire de l'ellipse est donc égale à celle d'un cercle dont le diamètre serait moyen proportionnel entre les deux axes.

174. Soit une suite de cercles situés dans des plans diffé-

rens, et se coupant tous suivant un diamètre commun : si on les projette sur un même plan quelconque passant par ce diamètre, leurs projections seront une suite d'ellipses ayant le même grand axe. Soit pris cet axe pour axe des abscisses : si, pour une abscisse quelconque, on mène les ordonnées correspondantes de tous les cercles, les projections de ces ordonnées se confondront en une seule droite qui sera une ordonnée commune à toutes les ellipses ; que par les extrémités des ordonnées aux différens cercles, lesquelles répondent à une même abscisse, on mène des tangentes à ces cercles, ces tangentes iront toutes se terminer au même point du prolongement de leur diamètre commun (*), ou du grand axe des ellipses ; et les projections de ces tangentes, qui seront des tangentes aux ellipses, concourront aussi en ce point : propriété démontrée (105).

On pourrait encore déduire de ces considérations, grand nombre d'autres propriétés démontrées par une voie bien différente dans le chapitre des propriétés de l'ellipse, et particulièrement celle-ci : que l'équation de l'ellipse, rapportée à un système de diamètres conjugués, est de même forme que l'équation aux axes.

175. On voit donc combien la doctrine des projections est propre à simplifier la démonstration d'un grand nombre de propositions de l'ellipse, ce qu'on pourrait dire encore de plusieurs propositions de géométrie.

(*) Si on a plusieurs cercles concentriques, sur chacun desquels on prenne un point répondant à la même abscisse, et si à chacun de ces points on mène une tangente et une normale, comme les normales vont toutes aboutir au centre, les tangentes iront nécessairement passer par un même point du prolongement du diamètre.

CHAPITRE XV.

Des courbes qui résultent de la section d'un cône par un plan.

176. Les anciens ont donné aux trois courbes que nous venons de considérer, le nom de *sections coniques*, parce qu'on obtient ces courbes en coupant un cône par un plan, sous différentes positions.

177. Une surface conique est une surface engendrée par une droite assujétie à passer constamment par un point fixe, et à glisser le long d'une courbe nommée *directrice* : la droite se nomme *génératrice* de la surface. Le cône est dit *circulaire* quand la directrice est un cercle. Le prolongement de la génératrice au-delà du point fixe, par rapport à la directrice, engendre un autre cône opposé par le sommet à celui que nous venons de considérer. Le point fixe qu'on nomme *sommet*, est dit aussi *centre* de la surface, et les surfaces coniques opposées, se nomment *nappes*.

Parmi toutes les surfaces coniques engendrées comme nous venons de le dire, celle qui a pour base un cercle, et dont l'axe, c'est-à-dire, la droite qui joint le sommet au centre de la base, est perpendiculaire au plan de cette base, est dit *cône droit*. C'est le seul que l'on considère dans la géométrie. Le cône que nous allons supposer, est un cône oblique à base circulaire.

178. Soient (fig. 145) le cône SANBN' et ANBN' la circonférence de sa base ; imaginons par l'axe SC du cône un plan

SAB qu'on nomme *plan* par l'axe, et que nous supposerons perpendiculaire au plan de la base qu'il coupe suivant BA, et perpendiculairement à ce plan, un autre plan qui coupera la surface conique suivant la courbe EMDM′ : le plan coupant et le plan de la base étant perpendiculaires au plan par l'axe, l'intersection GKH des deux premiers plans, est perpendiculaire au troisième SAB (Géom.)

Si dans le plan par l'axe SBA, et par le point D dans lequel le plan sécant du cône rencontre l'arête SB, on mène une parallèle DI à l'arête SA, le point K peut se trouver à gauche du point I, se confondre avec lui, ou rester à sa droite. Dans le premier cas, il est visible que le plan coupant doit rencontrer l'arête SA en un point E, par exemple; on voit de plus que ce plan coupant laissera au-dessus de lui, le cône opposé au sommet à celui que nous considérons : ainsi la courbe sera fermée : c'est celle que nous allons d'abord considérer.

1°. Si par un point quelconque M de la courbe EMDM′, on mène un plan parallèle à la base du cône, la section sera un cercle M*a*M′*b* qui coupera la courbe en M et M′, et le plan par l'axe suivant *ab*, diamètre du cercle dont le centre est la rencontre de *ab* et SC : l'intersection ED du plan de la courbe par le plan SAB et le diamètre *ab*, se couperont en un point P qui sera, en même temps, sur les plans de la courbe et du cercle, et conséquemment sur leur intersection MM′ : or la droite MPM′ parallèle à GKH, sera perpendiculaire à SAB, et conséquemment aux droites *ab* et DE; et comme MP = M′P, quelle que soit la position du plan de la section circulaire entre les points D et E, il s'ensuit que DE sera l'axe de la courbe EMDM′.

Par la propriété du cercle, on a

$$\overline{MP}^2 = aP \times Pb\,;$$

d'où nous allons déduire l'équation de la courbe. Si l'on prend pour origine des coordonnées de la courbe, le milieu O du diamètre ED, cette droite pour axe des abscisses x, et une parallèle par O à MM′, pour axe des ordonnées y, et si

l'on désigne DE par 2A, on aura

$$EP = A + x, \quad DP = A - x.$$

Or les triangles semblables aPE, AEK donnent

$$aP : EP :: AK : EK,$$

d'où

$$aP = \frac{AK}{EK}(x + A):$$

les triangles semblables DPb, DKB fournissent la proportion

$$bP : DP :: BK : DK,$$

d'où

$$bP = \frac{BK}{DK}(A - x),$$

et conséquemment,

$$aP \times bP = y^2 = \frac{AK \times BK}{EK \times DK}(A^2 - x^2) \ldots\ldots (1).$$

Or les lignes AK, BK, EK, DK sont connues et calculables, puisqu'elles dépendent des dimensions du cône qui est donné, et de la position du plan coupant. L'équation (1) est celle d'une ellipse rapportée à ses axes, $\frac{AK \times BK}{EK \times DK}$ représentant le rapport entre les carrés des demi-axes, comme on peut s'en assurer, en faisant dans (1), $x = 0$, et désignant l'ordonnée correspondante par B^2; d'où il suit, en effet, que

$$\frac{AK \times BK}{EK \times DK} = \frac{B^2}{A^2}.$$

Si l'on fait

$$\frac{AK \times BK}{EK \times DK} = 1,$$

l'équation (1) deviendra

$$y^2 = A^2 - x^2 \ldots\ldots (2);$$

or de l'hypothèse précédente, résulte la proportion

$$KA : KE :: KD : KB;$$

d'où l'on conclut que les deux triangles EKA, DKB ont un angle égal en K compris entre des côtés proportionnels, et qu'ainsi ils sont semblables : donc l'angle AEK est égal à l'angle B; donc aussi l'angle SED est égal à l'angle B : les droites AB, ED sont alors dites *anti-parallèles*; et, sous cette position, la section est encore un cercle, comme l'annonce la forme de l'équation (2).

2°. Si le point K se confond avec le point I (fig. 146), le plan coupant, toujours perpendiculaire au plan SAB par l'axe, est parallèle à l'arête ASA'; il ne traverse pas le cône SAB, et il ne rencontre pas son opposé; ainsi la section est une courbe limitée dans un sens, et indéfinie dans l'autre.

Si l'on fait la même construction que dans le cas précédent, on aura de même

$$\overline{MP}^2 = aP \times Pb = AK \times Pb;$$

prenant l'origine des coordonnées en D, et faisant $DP = x$, $MP = y$, les triangles semblables DPb, DKB donneront

$$bP : DP :: BK : DK,$$

d'où

$$bP = \frac{BK}{DK} \times DP,$$

et

$$y^2 = \frac{AK.BK}{DK}\,x\ldots\ldots(3),$$

équation connue d'une parabole rapportée à son axe principal.

3°. Le point K étant à droite du point I (fig. 147), le plan coupant rencontre le cône opposé au sommet; et comme il ne peut rencontrer les arêtes SA et SB', la section est une courbe composée de deux branches indéfinies. En faisant toujours la même construction, prenant l'origine des coordonnées au point O, milieu de DE, faisant $DE = 2A$,

$OP = x$, $MP = y$, on a toujours

$$y^2 = aP \times bP\,;$$

mais les triangles semblables aEP, AEK donnent

$$aP : EP :: AK : EK\,;$$

et les triangles aussi semblables bDP, BDK donnent

$$bP : DP :: BK : DK\,;$$

et comme $EP = A + x$, $DP = x - A$, on déduira des deux proportions précédentes,

$$aP = \frac{AK}{EK}(x + A), \qquad bP = \frac{BK}{DK}(x - A),$$

et conséquemment,

$$y^2 = \frac{AK \times BK}{EK \times DK}(x^2 - A^2) \ldots\ldots (4),$$

mais pour $x = 0$, l'ordonnée y est imaginaire, et conséquemment de la forme $B\sqrt{-1}$; donc

$$-B^2 = \frac{AK \times BK}{EK \times DK} \times -A^2;$$

ensorte que l'équation précédente devient

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2),$$

qu'on sait être à l'hyperbole rapportée à ses axes.

Nous donnerons à la fin de ce Traité, dans le chapitre *des Surfaces*, une solution analytique de la même question.

Ces quinze chapitres forment la première partie de l'ouvrage dont la seconde se rapporte à l'espace.

CHAPITRE XVI.

Élémens de position d'un point dans l'espace ; notation algébrique de ces élémens. Équations de la ligne droite dans l'espace. Problèmes.

179. Soient (fig. 148) trois droites fixes ou *axes* AX, AY, AZ, dont chacun soit perpendiculaire au plan des deux autres en A : chacun des plans ZAY, ZAX, XAY sera pareillement perpendiculaire aux deux autres : ils formeront donc les trois faces d'un parallélepipède rectangle, et l'angle solide trièdre A. Nous supposerons les plans ZAX, ZAY verticaux, et le plan XAY horizontal.

Qu'on se représente un point M dans l'espace entre ces plans, c'est-à-dire, en deçà du plan XAZ, à droite du plan ZAY, et au-dessus du plan XAY, et qu'on imagine de M des perpendiculaires MM′, MM″, MM‴ sur ces trois plans : ces perpendiculaires mesureront les plus courtes distances du point de l'espace à chacun de ces plans. Les plans menés par les perpendiculaires MM′ et MM″, MM′ et MM‴, MM″ et MM‴ fermeront le parallélepipède, et le point de l'espace sera le sommet d'un angle solide trièdre opposé à l'angle solide trièdre A.

La distance MM′ est en longueur vraie *m*M‴ ou A*m*″ ; la distance MM″ est égale à M‴*m*″ ou à A*m* ; enfin la distance MM‴ est égale à A*m*′ : ainsi les trois distances du point M aux trois plans coordonnés, se retrouvent en A*m*, A*m*′, A*m*″ sur les trois axes, à partir de l'origine A : ces mêmes distances sont encore A*m*, *m*M‴ et M‴M ; ensorte qu'en partant du point A, on arrivera au point M de l'espace, en prenant, 1°. sur

AX, une longueur Am, égale à la distance du point M au plan ZAY; 2°. sur la parallèle à AY menée par m, une longueur mM$'''$ égale à la distance du même point M au plan ZAX; 3°. sur une verticale menée par M$'''$, laquelle est parallèle à AZ, une longueur M$'''$M égale à la distance de M au plan horizontal.

Les points M$'$, M$''$, M$'''$ pieds des plus courtes distances du point M aux trois plans, se nomment *projections verticales et horizontale; verticales*, lorsqu'il s'agit de M$'$ et M$''$; *horizontale*, lorsqu'il s'agit de M$'''$.

Deux de ces projections suffisent pour retrouver le point: en effet, les perpendiculaires élevées par chacune d'elles, au plan qui la contient, se coupent dans le point de l'espace.

La troisième projection résulte évidemment des données des deux autres: ainsi on conclut la projection M$'''$, par exemple, des projections données M$'$ et M$''$.

La position d'un point de l'espace, est donc complètement définie par ses distances aux trois plans rectangulaires de projection, ou par deux de ses trois projections sur ces plans, lesquelles impliquent ces trois distances: nous noterons d'une manière abrégée ces trois élémens de position du point M, savoir, Am, mM$'''$ ou Am'', M$'''$M ou Am' par les lettres x, y et z, qui rappellent les axes sur lesquels, ou parallèlement auxquels elles sont comptées; nous désignerons encore abréviativement, le plan XAY par (xy), le plan ZAX par (xz), et le plan ZAY par (zy).

180. Supposons maintenant que a, b, c soient les distances effectives du point M aux trois plans de projection; nous rappellerons par ces formules,

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

que la distance a doit être portée de A en m sur l'axe AX, que la distance b doit être portée de A en m'' sur l'axe AY, ou parallèlement à cet axe de m en M$'''$; que la distance c doit être portée de A en m' sur l'axe AZ, ou de M$'''$ en M sur la parallèle à cet axe.

Le système des formules

$$x = a\,, \quad z = c,$$

note la position de la projection M'; celui des formules

$$y = b\,, \quad z = c,$$

note la position de M'', et ces deux systèmes suffisent : aussi comprennent-ils les trois distances.

Pour un point situé dans le plan horizontal, on a

$$z = 0\,, \quad x = a\,, \quad y = b\,;$$

pour un point situé dans le plan ZAX, on a

$$y = 0\,, \quad x = a\,, \quad z = b\,;$$

pour un point dans le plan ZAY, on a

$$x = 0\,, \quad y = b\,, \quad z = c.$$

Un point de l'axe AX est noté par

$$z = 0\,, \quad y = 0\,, \quad x = a\,;$$

un point de l'axe AY est noté par

$$z = 0\,, \quad x = 0\,, \quad y = b\,;$$

un point de l'axe AZ, l'est par

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = c:$$

enfin, l'origine A est rappelée par

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 0.$$

181. Considérons (fig. 148) les trois plans $MM'mM''$, $MM''m''M'''$, $MM'm'M''$ respectivement parallèles aux plans coordonnés (zy), (zx), (yx) : tout point du premier plan, et conséquemment ce plan lui-même est noté par

$$x = a,$$

puisque a est la distance commune de chacun de ses points au plan (yz) : le second plan est noté par

$$y = b,$$

le troisième l'est par

$$z = c.$$

Ces trois plans étant donnés, on a le point M qui est conséquemment défini par le système des trois formules

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

ainsi que nous l'avons vu plus haut.

182. On observera qu'il se forme autour du point A, huit angles trièdres, et que le point que l'on considère peut être dans chacun de ces huit angles : ces positions sont indiquées par les signes des coordonnées a, b et c : si l'on désigne par AX′, AY′, AZ′ les prolongemens des axes AX, AY, AZ; et qu'on indique par MZYX, la position du point M dans l'angle ZYX, et ainsi des autres, on aura

$$\text{pour} \left\{\begin{array}{l} \text{MZYX} \\ \text{MZY'X} \\ \text{MZY'X'} \\ \text{MZYX'} \\ \text{MZ'YX} \\ \text{MZ'Y'X} \\ \text{MZ'Y'X'} \\ \text{MZ'YX'} \end{array}\right\} \begin{array}{lll} x = a, & y = b, & z = c \\ x = a, & y = -b, & z = c \\ x = -a, & y = -b, & z = c \\ x = -a, & y = b, & z = c \\ x = a, & y = b, & z = -c \\ x = a, & y = -b, & z = -c \\ x = -a, & y = -b, & z = -c \\ x = -a, & y = b, & z = -c \end{array}$$

183. Considérons maintenant une ligne droite AB (fig. 149) située d'une manière quelconque dans l'espace, et un plan KL qui soit celui de la planche : si de tous les points M, n, o, etc.....N de la droite, on conçoit des perpendiculaires sur le plan KL, la série M′, n', o'....N′ de leurs piés, sera une ligne droite ab qu'on nomme *projection* de la droite MN. Si le plan KL est horizontal, la droite M′N′ sera dite *projection horizontale* de MN. Mais on observera qu'il suffit de projeter sur KL les extrémités M et N de MN, puisqu'en

joignant ces projections M′ et N′, on a encore la projection de la droite de l'espace.

Le plan MNN′M′ s'appelle *plan projetant*, et KL se nomme *plan de projection*. Le plan projetant d'une droite est donc celui qui, passant par cette droite, est perpendiculaire au plan de projection; ensorte que l'intersection de ces deux plans, est la projection de la droite.

M′N′ est la projection commune sur le plan KL de toute droite située d'une manière quelconque dans le plan projetant MNN′M′, et comprise entre les perpendiculaires extrêmes MM′, NN′. On ne peut donc conclure une ligne de l'espace de la seule donnée d'une projection.

184. Supposons toujours (fig. 150) le plan horizontal KL, puis un plan PQ qui lui soit perpendiculaire : soit une ligne MN dans l'espace, au-dessus de KL et à droite de PQ; MM″, NN″ étant deux verticales ou deux perpendiculaires sur le plan horizontal, M″N″ sera *la projection horizontale* de MN : de même, les lignes MM′, NN′ étant perpendiculaires sur le plan PQ, M′N′ sera *la projection verticale de la même droite MN*. Maintenant si par M″N″ on mène un plan perpendiculaire à KL, et par M′N′ un plan perpendiculaire à PQ, l'intersection de ces deux *plans projetans*, sera la droite MN de l'espace. Les données des deux projections d'une droite sur deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, suffisent donc pour définir la droite, c'est-à-dire, pour la faire retrouver de position et de longueur dans l'espace.

Dans la pratique, la projection M′N′ ne se trace pas sur un plan qui soit réellement vertical; on conçoit que ce plan ait tourné autour de sa base PP′, jusqu'à venir s'appliquer sur PP′KL′; alors les points M′ et N′ se rabattent sur le plan PP′KL′ en décrivant des circonférences des points *m* et *n*, comme centres, avec les rayons *m*M′, *n*N′ perpendiculaires en *m* et *n* à l'axe PP′ de rotation : ces points viennent donc se placer en M‴, N‴ sur les prolongemens de N″*n*, M″*m* perpendiculaires à PP′.

On peut supposer un troisième plan mené par $P'K'$ et $P'Q$, et sur lequel on ait aussi projeté la ligne MN.

185. Ainsi AX, AY, AZ (fig. 151) étant trois axes dont chacun est perpendiculaire au plan des deux autres, et qui déterminent deux plans verticaux et un plan horizontal, on a en $M'N'$, $M''N''$ les deux projections verticales de la droite, et en $N'''M'''$ sa projection horizontale.

L'une quelconque de ces trois projections est la conséquence des deux autres : ainsi, par exemple, étant données les deux projections verticales $N'M'$, $N''M''$, et le plan ZAY' étant dans le prolongement du plan ZAX qui est perpendiculaire au plan horizontal XAY, on supposera le plan ZAY', ainsi que le plan horizontal, en position vraie : alors les axes AY', AY coïncideront en un seul perpendiculaire en A aux axes AX, AZ ; les piés n'', m'' des perpendiculaires abaissées de N'' et M'' sur l'axe AY', viendront en n'', m'' sur l'axe AX, aux mêmes distances de A : si par ces deux derniers points on mène des parallèles $n''N'''$, $m''M'''$ à l'axe AX, et par n''', m''' des parallèles $n'''N'''$, $m'''M'''$ à l'axe AY, on aura en $N'''M'''$ la projection horizontale de la droite.

La droite de l'espace, que nous appellerons MN, les deux perpendiculaires abaissées de ses extrémités M et N sur le plan horizontal, en M''' et N''', lesquelles sont respectivement égales à $M'm'''$, $N'n'''$, et la projection horizontale $M'''N'''$, forment un trapèze dont le plan est vertical, et qu'on peut rabattre sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa base $M'''N'''$: ce trapèze ainsi rabattu, est $M'''N'''NM$. Si par M on mène la parallèle $M\nu$ à $M'''N'''$, on aura

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 = \overline{N\nu}^2 + \overline{M\nu}^2 &= (NN''' - \nu N''')^2 + \overline{M'''N'''}^2 \\ &= (N'n''' - M'm''')^2 + \overline{M'''N'''}^2 \\ &= (An - Am)^2 + \overline{M''N''}^2.\end{aligned}$$

Que par N''' on mène $N'''\nu'$ parallèle à AX, on aura

$$\overline{M'''N'''}^2 = \overline{M'''\nu'}^2 + \overline{N'''\nu'}^2 = (Am'' - An'')^2 + (An''' - Am''')^2.$$

Donc

$$\overline{MN}^2 = (An - Am)^2 + (Am'' - An'')^2 + (An''' - Am''')^2.$$

Soient $An''' = x''$, $Am''' = x'$, $An'' = y''$, $Am'' = y'$, $An = z''$, $Am = z'$; et on trouvera

$$MN = \sqrt{(z'' - z')^2 + (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2}.$$

Ainsi la distance MN est énoncée au moyen des distances de ses extrémités aux plans rectangulaires.

Lorsque le point M est en A, c'est-à-dire à l'origine, on a $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, et

$$MN = \sqrt{z''^2 + y''^2 + x''^2}.$$

186. Nous avons vu que de deux des trois projections d'une droite, on pouvait conclure la position de la droite dans l'espace : ainsi l'équation d'une droite dans l'espace, sera le système des équations de deux de ses projections. Soient donc (fig. 152) RL, R'L' les projections d'une droite sur les plans ZAX, ZAY' ou ZAY, en position vraie, et considérons un point quelconque de cette droite, projeté en M' et M'' : on observera que les perpendiculaires menées de M' et M'' sur l'axe AZ, doivent le rencontrer en un même point P, ensorte que, le second plan vertical étant rabattu en ZAY' sur le prolongement de ZAX, les perpendiculaires M'P, M''P ne forment plus qu'une droite perpendiculaire en P à l'axe AZ. Imaginons par R et R' des parallèles à l'axe AZ, et désignons par a et b les tangentes trigonométriques des angles M'Rp, M''R'p', et par α et β les distances AR, AR'. La droite de l'espace étant donnée, on connaît ses élémens de position α, β, a et b, lesquels doivent entrer dans son équation. Or on a

$$\frac{pM'}{Rp} = a, \qquad \frac{p'M''}{R'p'} = b,$$

d'où

$$pM' = a \cdot Rp, \qquad p'M'' = b \cdot R'p'.$$

Mais

$$pM' = PM' - Pp = PM' - AR,$$
$$p'M'' = PM'' - Pp' = PM'' - AR';$$

donc

$$PM' - AR = a.Rp, \qquad PM'' - AR' = b,R'p'.$$

Or $AP = z$, $PM' = x$, $PM'' = y$; conséquemment les équations des projections sont

$$(1)\ldots.\ x = a.z + \alpha, \qquad y = b.z + \beta\ldots.(2),$$

dont le système exprime la droite de l'espace.

Si on élimine z entre les équations (1) et (2), on obtiendra cette équation

$$y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha)\ldots..(3),$$

équation de la projection sur le plan horizontal : par cette élimination, on note la droite de l'espace, indépendamment du z, ou plutôt on écrit toutes les droites de l'espace dont la relation entre x et y resterait la même ; or ces droites ne peuvent être que celles qui se trouvent dans le plan suivant lequel la droite se projette horizontalement, droites qui ont une commune projection horizontale.

Si l'on ramène la droite de l'espace parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle vienne passer par l'origine, les équations (1), (2), (3) deviendront

$$x = az, \qquad y = bz, \qquad y = \frac{b}{a}x.$$

Si la droite est parallèle, par exemple, au plan des (xz), sa projection horizontale sera parallèle à l'axe AX, et elle aura conséquemment pour équation $y = \beta$, β étant la distance constante de tous les points de la droite au plan (xz) ; et sa projection sur ce plan, sera toujours représentée par

$$x = az + \alpha.$$

Si la droite est verticale, sa projection sur le plan hori-

zontal sera un point dont

$$x = \alpha, \quad y = \mathcal{C}$$

seront les coordonnées, et sa projection dans le plan (xz), sera

$$x = \alpha.$$

Pour trouver les coordonnées des points dans lesquels une droite de l'espace perce les trois plans de projection, il faut faire successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ dans les équations (1) et (2), et l'on trouve ainsi, 1°.

$$x = \alpha, \quad y = \mathcal{C},$$

pour le point où la droite perce le plan (xy) ; 2°.

$$z = -\frac{\mathcal{C}}{b}, \quad x = -\frac{a\mathcal{C}}{b} + \alpha,$$

pour celui où elle perce le plan (xz) ; 3°.

$$z = -\frac{\alpha}{a}, \quad y = -\frac{b\alpha}{a} + \mathcal{C},$$

pour celui où elle perce le plan (zy).

187. Nous pouvons maintenant donner une autre expression de la longueur d'une portion définie d'une droite de l'espace. M'N', M''N'', M'''N''' étant les trois projections de la portion de droite que nous considérons (fig. 151), si on les désigne par p, p', p'', on aura

$$\begin{aligned} p^2 = \overline{M'N'}^2 &= (N'n''' - M'm''')^2 + \overline{M'\mu}^2 \\ &= (N'n''' - M'm''')^2 + (An''' - Am''')^2, \end{aligned}$$

et conséquemment,

$$p^2 = (z'' - z')^2 + (x'' - x')^2;$$

on trouveroit de même

$$p'^2 = (z'' - z')^2 + (y'' - y')^2,$$
$$p''^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2:$$

donc en ajoutant et divisant par 2,

$$\frac{p^2+p'^2+p''^2}{2}=(z''-z')^2+(y''-y')^2+(x''-x')^2=\overline{MN}^2,$$

conclusion qui a encore lieu pour $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$: on obtient alors la longueur de la diagonale d'un parallélepipède rectangle, au moyen de celles des diagonales des trois faces contiguës à l'angle solide trièdre A.

188. Nous allons faire entrer dans les équations de la droite de l'espace, les cosinus des angles qu'elle fait avec les trois axes.

Supposons d'abord que la droite passe par l'origine, auquel cas ses équations deviennent

$$x=az, \quad y=bz, \quad z=\frac{b}{a}x,$$

et désignons par α', β', γ' les angles de cette droite avec les axes des x, y et z: si l'on prend sur cette droite, à partir de l'origine, une longueur l de l'extrémité de laquelle on abaisse des perpendiculaires sur ces axes, on aura ces proportions,

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha' : 1 :: x : l,\\ \cos\beta' : 1 :: y : l,\\ \cos\gamma' : 1 :: z : l,\end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l}x=l\cos\alpha',\\ y=l\cos\beta',\\ z=l\cos\gamma',\end{array}\right.$$

et conséquemment,

$$\frac{x}{z}=\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}=a, \quad \frac{y}{z}=\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}=b, \quad \frac{y}{x}=\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}=\frac{b}{a},$$

donc les équations

$$x=az+\alpha, \qquad y=bz+\beta, \qquad y-\beta=\frac{b}{a}(x-\alpha),$$

deviennent

$$(x-\alpha)\cos\gamma'=z\cos\alpha', \qquad (y-\beta)\cos\gamma'=z\cos\beta',$$
$$(x-\alpha)\cos\beta'=(y-\beta)\cos\alpha'\ldots\ldots(4);$$

c'est sous cette forme qu'on écrit souvent en mécanique, les équations d'une droite de l'espace.

189. Avant de résoudre quelques questions sur les lignes droites considérées dans l'espace, nous observerons que lorsqu'une telle droite est donnée, les élémens de sa position a, b, α, β sont connus, et qu'au contraire, si la droite est assujétie à certaines conditions, ces quantités sont des inconnues à évaluer.

Problème I^{er}. *Trouver la condition sous laquelle deux droites données dans l'espace se rencontrent.*

Soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

les équations de l'une des droites, et

$$x = a'z + \alpha', \qquad y = b'z + \beta',$$

celles de l'autre. On observera qu'il ne s'agit pas ici de trouver le point de rencontre, mais d'exprimer qu'il existe un tel point, et conséquemment d'assigner la relation correspondante à cette condition, entre les données a, α, b, β; a', α', b', β', relation qui sera donnée par l'élimination des coordonnées x, y, z entre les équations ci-dessus. On trouve ainsi que les droites ne peuvent se rencontrer qu'autant que les quantités a, α, b, β, a', α', b', β' satisfont à l'équation.

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

Problème II. *Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Lorsque deux droites dans l'espace sont parallèles, leurs projections sur les mêmes plans, sont des droites parallèles. Soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

les équations de la droite donnée, x', y', z' les coordonnées du point donné par lequel doit passer la parallèle, et

$$x = a'z + \alpha', \qquad y = b'z + \beta',$$

les équations de la droite cherchée : pour exprimer, en gé-

néral, le parallélisme des deux droites, il faut écrire

$$a' = a, \qquad b' = b:$$

et pour que la seconde droite passe par le point donné, il faut que ses équations soient satisfaites par $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, ensorte que la droite cherchée sera exprimée par

$$x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z'),$$

équations d'où résulte celle-ci,

$$y - y' = \frac{b}{a}(x - x'),$$

qui appartient à la troisième projection.

Problème III. *Assujétir une droite à passer par deux points donnés dans l'espace.*

Soient x', y', z'; x'', y'', z'' les coordonnées de ces points M′ et M″, et

$$(1)\ldots\ldots x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta\ldots\ldots(2)$$

les équations de la droite cherchée, dans lesquelles a, b, α, β sont des quantités inconnues, et à évaluer au moyen des coordonnées données. Pour que la droite passe par le point x', y', z', il faut que ses équations aient lieu pour $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, ou qu'on ait

$$(3)\ldots\ldots x' = az' + \alpha, \qquad y' = bz' + \beta\ldots\ldots(4);$$

pour que la droite passe par le point x'', y'', z'', il faut que ses équations aient aussi lieu pour $x = x''$, $y = y''$, $z = z''$, ou qu'on ait

$$(5)\ldots\ldots x'' = az'' + \alpha, \qquad y'' = bz'' + \beta\ldots\ldots(6):$$

qu'on retranche (3) de (1), et (4) de (2), on aura

$$(7)\ldots\ldots x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z')\ldots(8);$$

qu'on retranche (5) de (3), et (6) de (4), il viendra

$$(9)\ldots\ldots x' - x'' = a(z' - z''), \qquad y' - y'' = b(z' - z'')\ldots(10);$$

On déduit des équations (9) et (10),

$$a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, \qquad b = \frac{y' - y''}{z' - z''};$$

ces valeurs reportées dans (7) et (8), donnent ces équations de la droite cherchée,

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z') \ldots .(11),$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \ldots .(12).$$

On observera, comme au n°. 23 (prob. I), que retrancher (3) de (1), et (4) de (2), revient, dans le fait, à déduire de (3) et de (4) les valeurs de α et β pour les reporter dans (1) et (2), et par l'opération suivante, on évalue les deux autres inconnues a et b.

On pourra s'assurer que les équations (11) et (12) rendent toutes les conséquences des hypothèses qu'on peut faire sur la position de chacun des points.

Problème IV. Trouver, 1°. *l'angle entre une droite de l'espace et sa projection horizontale; 2°. les équations d'une droite de l'espace, au moyen des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ses projections, et des angles entre ces perpendiculaires et chacun des axes.*

1°. Supposons que la droite l de l'espace passe par les points M′, M″, ayant pour coordonnées x', y', z'; x'', y'', z'' : par le point M′, soit menée à l'ordonnée verticale z'', une perpendiculaire M′m' qui sera une horizontale; l'angle M″M′m' sera l'inclinaison de la droite sur le plan horizontal (xy) : la tangente de cette inclinaison est $\frac{M''m'}{M'm'}$; or

$$M''m' = z'' - z'; \quad M'm' = \sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2};$$

si donc on désigne par (l, P) l'angle entre la droite de l'espace

et sa projection P sur le plan horizontal, on aura

$$\tang (l, P) = \frac{z'' - z'}{\sqrt{(y''-y')^2 + (x''-x')^2}}.$$

2°. La droite de l'espace passant par les points x', y', z'; x'', y'', z'', sa projection horizontale passe par les points x', y'; x'', y''; et on a trouvé (24) pour équation de cette projection,

$$x \times \frac{y''-y'}{\mu'\mu''} - y \times \frac{x''-x'}{\mu'\mu''} = \frac{x'y''-x''y'}{\mu'\mu''},$$

en observant que $\mu'\mu'' = M'm' = \sqrt{(y''-y')^2) + (x''-x')^2}$.
L'équation de la projection sur le plan des (yz), est

$$y \times \frac{z''-z'}{\nu'\nu''} - z \times \frac{y''-y'}{\nu'\nu''} = \frac{y''z'-y'z''}{\nu'\nu''},$$

$\nu'\nu''$, projection de $M'M''$ sur le même plan, étant

$$= \sqrt{(y''-y')^2 + (z''-z')^2}:$$

enfin, la projection de la même droite sur le plan des (zx), est

$$x \times \frac{z''-z'}{\varpi'\varpi''} - z \times \frac{x''-x'}{\varpi'\varpi''} = \frac{x''z'-x'z''}{\varpi'\varpi''},$$

$\varpi'\varpi''$ étant $\sqrt{(x''-x')^2 + (z''-z')^2}$.

Si dans la première de ces trois équations, on fait $y=0$, on trouve

$$x = \frac{x''y'-x'y''}{y'-y''},$$

et pour $x=0$, on obtient

$$y = \frac{x''y'-x'y''}{x''-x'}.$$

Telles sont les valeurs des coordonnées des points d'intersection de la projection horizontale de la droite, avec les axes des x et y.

Problème V. Trouver, 1°. *l'angle de deux droites données de position dans l'espace ; 2°. les angles d'une droite de l'espace avec les trois axes rectangulaires.*

Deux droites de l'espace peuvent ne pas se couper, sans être parallèles; ce qui arrive lorsqu'elles ne sont pas dans un même plan: cependant leurs projections sur un même plan se coupent; mais alors la droite qui joint les points de rencontre des intersections des projections sur deux des trois plans, n'est plus perpendiculaire à l'axe qui est l'intersection des deux plans de projection, circonstance qui a toujours lieu lorsque les deux droites se coupent dans l'espace.

Lorsque les deux droites ne se coupent pas, on prend pour leur angle celui que ferait l'une d'elles avec une parallèle à l'autre, menée par un point quelconque de la première : et il est clair qu'on peut, à ces droites, substituer deux parallèles AL, Al menées par l'origine A des coordonnées, parallèles qu'il faut voir dans l'espace.

Si à partir de l'origine A, et sur chacune des droites AL, Al, on prend des longueurs $AM = AN = 1$, et qu'on mène la transversale MN, on aura, d'après un théorème de trigonométrie,

$$\cos MAN = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - \overline{MN}^2}{2AM.AN} = \frac{2 - \overline{MN}^2}{2},$$

et cette droite MN doit être exprimée au moyen des données a, b; a', b' qui fixent la position de chacune des droites. Mais x', y', z'; x'', y'', z'' étant les coordonnées des points M et M, on sait (185) que

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= (x''-x')^2+(y''-y'^2)+(z''-z')^2\\ &= x''^2+y''^2+z''^2+x'^2+y'^2+z'^2-2(x'x''+y'y''+z'z'')\\ &= \overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2(x'x''+y'y''+z'z'')\\ &= 2-2(x'x''+y'y''+z'z'');\end{aligned}$$

donc

$$\cos MAN = x'x''+y'y''+z'z''.$$

Or les équations des droites AL, Al qui passent par l'ori-

gine, sont (188)

$$x = az,\quad y = bz;\quad x = a'z,\quad y = b'z;$$

et comme ces droites passent aussi par les points M et N, on a en même temps

$$x' = az',\quad y' = bz',\quad x'' = a'z'',\quad y'' = b'z'';$$

ainsi,

$$\cos \mathrm{MAN} = (aa' + bb' + 1)\, z'z'';$$

mais à cause de

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\overline{\mathrm{AN}}^2 = 1 = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

on obtiendra

$$z' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},\qquad z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

et enfin, en désignant par L et l les droites AL, Al,

$$\cos(\mathrm{L}, l) = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\ \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \ldots\ldots (1).$$

Le cosinus de l'angle de deux droites est donc ainsi évalué au moyen des données de la question.

Le problème XII (chapitre II) n'est qu'un cas particulier du précédent.

Corollaire I. Lorsque l'angle (L, l) est droit, le cosinus est nul, et on a cette relation

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

Corollaire II. Il est facile de déduire de (1) les expressions des cosinus des angles entre une droite fixe AL et chacun des axes coordonnés. A cet effet, il faut supposer que l'autre droite Al se confonde successivement avec chacun des axes AX, AY, AZ, et rechercher ce que devient alors la formule (1).

Lorsque la droite Al coïncide avec l'axe AZ, les tangentes trigonométriques a' et b' sont nulles, et en désignant par cos (L, z), cos (L, y), cos (L, x), les cosinus des angles de la droite AL que nous nommerons L, avec chacun

des axes, on a

$$\cos(L, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \ldots\ldots (2).$$

Lorsque Al coïncide avec AY ou AY′, sa projection sur le plan des (yz), tombe suivant cet axe, alors $b' = \frac{1}{0}$ ou $\frac{1}{b'} = 0$: la projection sur le plan des (xz) est l'origine des coordonnées ; donc $a' = 0$: ces hypothèses introduites dans la formule (1) dont on a divisé les deux termes par b', donnent

$$\cos(L, y) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \ldots\ldots (3).$$

Enfin, lorsque Al tombe suivant AX, sa projection sur le plan des (xz) tombe suivant cet axe ; d'où résultent $a' = \frac{1}{0}$ ou $\frac{1}{a'} = 0$, $b' = 0$; et après avoir divisé les deux termes de la formule (1) par a', et introduit ces hypothèses, on a

$$\cos(L, x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \ldots (4).$$

Qu'on fasse les carrés de $\cos(L, z)$, $\cos(L, y)$, $\cos(L, x)$, qu'on les ajoute, et on obtiendra cette propriété

$$\cos^2(L, z) + \cos^2(L, y) + \cos^2(L, x) = 1 \ldots (5).$$

Corollaire III. Il est facile maintenant d'exprimer le cosinus de l'angle des deux droites $AL = L$, $Al = l$ au moyen des cosinus des angles de chacune de ces droites avec les trois axes : car pour la droite l, on aura pareillement

$$\cos(l, z) = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \ldots\ldots (6),$$

$$\cos(l, y) = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \ldots\ldots (7),$$

$$\cos(l, x) = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \ldots\ldots (8);$$

on tire de ces formules,

$$aa' = \cos(L, x) \cos(l, x) \sqrt{a^2+b^2+1} \sqrt{a'^2+b'^2+1},$$
$$bb' = \cos(L, y) \cos(l, y) \sqrt{a^2+b^2+1} \sqrt{a'^2+b'^2+1},$$
$$1 = \cos(L, z) \cos(l, z) \sqrt{a^2+b^2+1} \sqrt{a'^2+b'^2+1}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on trouve celle-ci

$$\cos(L, l) = \cos(L, x) \cos(l, x) + \cos(L, y) \cos(l, y) + \cos(L, z) \cos(l, z) \ldots\ldots (9)$$

Nous ferons un fréquent emploi des formules (4) et (8), surtout en supposant dans cette dernière l'angle (L, l) droit, d'où $\cos(L, l) = 0$, et

$$\cos(L, x) \cos(l, x) + \cos(L, y) \cos(l, y) + \cos(L, z) \cos(l, z) = 0 \ldots\ldots (10).$$

CHAPITRE XVII.

Équation du plan et problèmes.

190. La position d'un plan dans l'espace, est définie par celles de ses traces dans deux des trois plans coordonnés.

Soient toujours AX, AY, AZ (fig. 153) trois axes rectangulaires entr'eux : soient AB, AC les traces du plan donné passant par l'origine, sur les plans (xz), (yz) : considérons sur ce plan un point quelconque M ; si de ce point on abaisse une perpendiculaire MQ sur le plan (xy), et si du point Q on mène la parallèle QP à l'axe AY, les trois coordonnées du point M seront $MQ = z$, $QP = y$, $AP = x$; et l'équation du plan sera la relation entre ces coordonnées et les tangentes des angles donnés BAX, CAY.

Si par le point M on mène dans le plan BAC la parallèle MD à la trace AB, et par D l'horizontale D*d* parallèle au plan ZAX, les lignes DM, D*d*, MQ étant dans un même plan, on aura

$$MQ = MG + GQ \ldots\ldots (1).$$

Or si du point D on abaisse la perpendiculaire DH sur AY, laquelle le sera sur le plan (xy), il est clair que

$$GQ = DH = AH.\text{tang}\,DAH = y.\text{tang}\,DAH;$$

d'une autre part,

$$MG = DG.\text{tang}\,MDG = DG.\text{tang}\,BAX,$$

mais $DG = HQ = AP = x$, donc l'équation (1) devient

$$z = x.\text{tang}\,BAX + y.\text{tang}\,DAH;$$

et en faisant tang BAX $= a$, tang DAH $=$ tang DAY $= b$, cette équation sera

$$z = ax + by,$$

Supposons que le plan ne passe plus par l'origine A des coordonnées (fig. 154), et qu'il soit A'N' parallèle à AN : il faudra augmenter l'ordonnée QM $= z$, de MM' $=$ AA' qui est l'ordonnée verticale du point de rencontre de l'axe AZ par le plan A'N'; ensorte qu'en désignant AA' par d, on aura

$$z + d = z = ax + by + d \ldots\ldots (1),$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots\ldots (2),$$

en faisant $-\frac{A}{C} = a$, $-\frac{B}{C} = b$, $-\frac{D}{C} = d$.

Corollaire I. Si dans l'équation du plan,

$$z = ax + by + d,$$

on fait successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, les équations résultantes

$$z = 0, \quad ax + by + d = 0; \quad y = 0, \quad z = ax + d;$$
$$x = 0, \quad z = by + d$$

seront celles des traces du plan sur les plans coordonnés (xy), (xz), (yz).

Corollaire II. Si l'on fait encore dans la même équation, $z = 0$ et $y = 0$, $x = 0$ et $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$, les valeurs correspondantes de x, y et z, savoir,

$$x = -\frac{d}{a}, \quad y = -\frac{d}{b}, \quad z = d,$$

seront les distances comptées de l'origine aux points de rencontre du plan avec les trois axes coordonnés.

Corollaire III. L'équation d'un plan passant par l'axe des y, et conséquemment perpendiculaire à celui des (xz), s'obtient

en faisant $b=0$, $d=0$ dans (1) : elle est donc

$$z=ax\ldots\ldots(3).$$

On trouve de même que le plan mené par l'axe des x, répond à $d=0$, $a=0$, et qu'ainsi il est

$$z=by\ldots\ldots(4);$$

que le plan mené par l'axe des z, a, comme chacun des deux précédens, pour équation, celle de sa trace sur le plan auquel il est perpendiculaire, c'est-à-dire,

$$y=cx\ldots\ldots(5),$$

c étant la tangente de l'angle de la trace dans le plan (xy) avec l'axe des x : comme cette dernière équation résulte encore de l'élimination de z entre (3) et (4), on voit que $c=\frac{a}{b}$.

Corollaire IV. L'équation d'un plan quelconque perpendiculaire à celui des (xz), et conséquemment parallèle à un de ceux de l'équation (3), est

$$z=ax+\alpha\ldots\ldots(6);$$

celle d'un plan quelconque perpendiculaire à celui des (yz), ou parallèle à l'un de ceux de l'équation (4), est

$$z=by+\beta\ldots\ldots(7);$$

enfin celle d'un plan perpendiculaire à celui des (xy), est

$$y=cx+\gamma\ldots\ldots(8),$$

a, b, c ayant même acception que ci-dessus, et α, β, γ étant les coordonnées des points de rencontre des traces avec les axes des z et y.

Remarque. Nous observerons que ces six dernières équations qui ne contiennent que deux des trois coordonnées du plan perpendiculaire, et qui ne désignent que la trace de ce plan, appar-

tiennent cependant au plan. En effet, la coordonnée qui n'entre pas dans l'équation, étant indépendante des deux autres, admet une infinité de valeurs pour chaque point de la trace, et ces valeurs répondent aux points en nombre infini du plan, qui se trouvent sur cette coordonnée dans ses positions consécutives et parallèles dont l'ensemble constitue le plan.

191. *Enoncer l'équation du plan au moyen de la plus courte distance de l'origine sur le plan* (fig. 155).

Cette équation est analogue à celle de la ligne droite donnée (24), et, dans plusieurs cas, elle doit être employée de préférence à la précédente.

Soient A l'origine, AP′ la perpendiculaire abaissée de cette origine sur le plan Π dont la trace horizontale est XY ; AP la perpendiculaire menée de l'origine sur la trace XY : soit M un point quelconque du plan Π, duquel on abaisse une perpendiculaire Mm' sur le plan des (xy) : de m' soit menée la perpendiculaire $m'Q$ sur XY, et de m' et Q les perpendiculaires $m'p'$, Qp sur l'axe AX : enfin soient $m'n$ parallèle à AX, et la droite qui joint M et Q.

On a

$$AP' = AP \cos P'AP\,;$$

mais AP étant une perpendiculaire menée de l'origine sur la trace AY située dans le plan des (xy), on a (24)

$$AP = Ap \cos PAX + Qp \sin PAX\,,$$

donc

$$\begin{aligned} AP' &= (Ap \cos PAX + Qp \sin PAX) \cos P'AP \\ &= [(Ap'+p'p) \cos PAX + (m'p'+Qn) \sin PAX] \cos P'AP \\ &= (Ap' \cos PAX + m'p' \sin PAX) \cos P'AP \\ &\quad + (p'p \cos PAX + Qn \sin PAX) \cos P'AP. \end{aligned}$$

Mais l'angle en A est un angle solide trièdre formé par les trois faces P′AP, P′AX et PAX, et les deux faces P′AP,

PAX sont perpendiculaires entr'elles : or on sait que, dans un triangle sphérique rectangle dont les côtés mesurent les angles entre les arêtes d'un trièdre, et les angles mesurent les inclinaisons des faces, le produit du rayon par le cosinus du côté opposé à l'angle droit, est égal au produit des cosinus des deux autres côtés ; d'après ce principe, on a

$$\cos PAX \times \cos P'AP = \cos P'AX,$$
$$\sin PAX \times \cos P'AP = \cos P'AY,$$

en observant que $\sin PAX = \cos PAY$; donc

$$AP' = Ap' \cos P'AX + m'p' \cos P'AY$$
$$+ (p'p \cos PAX + Qn \sin PAX) \cos P'AP :$$

mais $PAX = Qm'n$; donc

$$p'p \cos PAX + Qn \sin PAX = m'n \cos Qm'n + Qn \sin Qm'n :$$

mais en menant de n une perpendiculaire nr sur $m'Q$, et imaginant de m' une perpendiculaire au plan Π, dont le pied tombe sur MQ, on trouve

$$m'n.\cos Qm'n + Qn.\sin Qm'n = m'Q = Mm'.\text{tang}\, m'MQ$$
$$= Mm'.\text{tang}\, P'AP,$$

ce qui devient clair, en imaginant de m' une perpendiculaire au plan Π ; donc

$$(p'p \cos PAX + Qn \sin PAX) \cos P'AP$$
$$= Mm' \sin P'AP = Mm' \cos P'AZ,$$

et conséquemment,

$$AP' = Ap' \cos P'AX + p'm' \cos P'AY + Mm' \cos P'AZ ;$$

c'est-à-dire,

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

192. Lorsqu'un plan est assujéti à certaines conditions, comme de passer par trois points donnés, de passer par une droite, et d'être parallèle à un plan donné de position, etc., les quantités a, b, d qui sont les élémens de position du plan,

sont les inconnues à déterminer de manière à satisfaire aux conditions de la question.

Problème I. *Mener un plan parallèle à un plan donné de position.*

L'équation du plan donné étant

$$z = ax + by + d,$$

où a, b, d sont donnés, et celle du plan cherché étant

$$z = a'x + b'y + d',$$

où a', b', d' sont les inconnues, la condition du parallélisme est exprimée par

$$a' = a, \qquad b' = b,$$

puisqu'on dit par là que les traces du plan cherché sont respectivement parallèles à celles du plan donné.

Problème II. *Faire passer un plan par trois points donnés dans l'espace.*

Les coordonnées des trois points donnés, que je désigne par M', M'', M''', sont pour M', x', y', z'; pour M'', x'', y'', z''; pour M''', x''', y''', z''': or l'équation du plan cherché pouvant encore être mise sous la forme

$$Ax + By + Cz = D,$$

on aura les trois conditions suivantes,

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= D, \\ Ax'' + By'' + Cz'' &= D, \\ Ax''' + By''' + Cz''' &= D, \end{aligned}$$

lesquelles divisées par D, donnent pour inconnues à déterminer, $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, et comme ces coefficiens ont pour valeurs des fractions ayant un même dénominateur (Alg., Ire sect., chap. XVII), dénominateur que nous égalerons à D, on aura

ces déterminations,

$$A = y'(z'' - z''') + y''(z''' - z') + y'''(z' - z''),$$
$$B = z'(x'' - x''') + z''(x''' - x') + z'''(x' - x''),$$
$$C = x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y''),$$
$$D = x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z').$$

Imaginons qu'on projette le triangle M'M''M''' (fig. 156) sur le plan (xz) en $m'm''m'''$; si de ces trois points on abaisse des perpendiculaires $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$ sur l'axe des x, on aura trois trapèzes, et en supposant que la perpendiculaire $m''n''$ soit la plus grande, si de la somme des aires des deux trapèzes $m'n'n''m'' + m''n''n'''m'''$ on retranche l'aire du trapèze $m'n'n'''m'''$, on aura l'aire du triangle projeté en $m'm''m'''$. Or,

$$\text{aire } m'n'n''m'' = \frac{(x'' - x')(z'' + z')}{2},$$

$$\text{aire } m''n''n'''m''' = \frac{(x''' - x'')(z''' + z'')}{2},$$

$$\text{aire } m'n'n'''m''' = \frac{(x''' - x')(z''' + z')}{2};$$

de la somme des deux premières surfaces, retranchant la dernière, il viendra, en désignant par t la différence,

$$t = \frac{B}{2};$$

si on représente par t', t'' les projections du même triangle sur les plans (yz), (xy), on trouvera par la même analyse,

$$t' = \frac{A}{2}, \qquad t'' = \frac{C}{2}.$$

Nous démontrerons bientôt que D est six fois la solidité d'une pyramide qui a pour base le triangle de l'espace, et pour sommet l'origine même des coordonnées.

Problème III. *Assujétir un plan à passer par une droite donnée.*

Les équations de la droite donnée sont

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta:$$

pour que le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

contienne la droite, il faut que les coordonnées de la droite conviennent au plan, c'est-à-dire qu'on ait

$$A(az + \alpha) + B(bz + \beta) + Cz + D = 0;$$

mais la coordonnée z devant être quelconque, cette équation se partage dans celles-ci,

$$(1)\ldots\ Aa + Bb + C = 0, \quad A\alpha + B\beta + D = 0\ldots(2),$$

dont la seconde a toujours lieu, lorsque la droite et le plan passent par l'origine. Si le même plan doit passer par une seconde droite

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta',$$

on a de même ces deux équations

$$(3)\ldots\ Aa' + Bb' + C = 0, \quad A\alpha' + B\beta' + D = 0\ldots(4).$$

Si l'on retranche (3) de (1), puis (4) de (2), on aura

$$A(a - a') + B(b - b') = 0\ldots(5),$$
$$A(\alpha - \alpha') + B(\beta - \beta') = 0\ldots(6).$$

Si l'on multiplie (5) par $\beta - \beta'$, et (6) par $b - b'$, puis qu'on retranche le second produit du premier, et qu'on divise par A, on trouvera

$$(a - a')(\beta - \beta') - (b - b')(\alpha - \alpha') = 0\ldots(7),$$

condition qui exprime que les deux droites sont dans le plan, et qu'elles se coupent; cette condition est satisfaite, lorsque les droites sont parallèles; en effet, dans ce cas, elles sont dans un même plan.

On observera que de la condition (2) on tire

$$D = -A\alpha - B\beta,$$

valeur de D par laquelle l'équation du plan devient

$$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + Cz = 0,$$

et il reste l'autre condition

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Pour $C = -1$, hypothèse qui répond à l'équation du plan $z = Ax + By + D$, ces deux équations deviennent

$$\left.\begin{array}{r} A(x-\alpha) + B(y-\beta) = z \\ Aa + Bb = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots(8).$$

Problème IV. *Assujétir un plan à passer par une droite donnée et par un point donné.*

Aux deux conditions (1) et (2) du problème III, il faut joindre celle-ci

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

x', y', z' étant les coordonnées du point donné. Si l'on fait $C = -1$ afin que l'équation du plan devienne

$$z = Ax + By + D,$$

et qu'on évalue A, B, D au moyen des équations

$$Aa + Bb - 1 = 0, \quad A\alpha + B\beta + D = 0,$$
$$z' = Ax' + By' + D,$$

on obtiendra cette équation du plan,

$$(x-x')(y-bz'-\beta) - (y-y')(x-az'-\alpha)$$
$$+ (z-z')[b(x'-\alpha) - a(y'-\beta)] = 0.$$

On voit, en effet, que le point donné est dans le plan, puisque son équation est satisfaite par $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$: cette équation est encore satisfaite par

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + \beta,$$

équations qui disent que le point est sur la droite.

Problème V. *Etant données les équations d'une droite et celles d'un plan, trouver les conditions qui doivent avoir lieu pour que le plan et la droite soient perpendiculaires l'un à l'autre.*

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projec-

tions de la droite sont perpendiculaires aux traces de même dénomination du plan. Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

les équations de la droite, et

$$z = Ax + By + D,$$

celle du plan : les équations des traces du plan sur les plans rectangulaires (xz), (yz), sont

$$z = Ax + D, \quad z = By + D,$$

d'où

$$x = \frac{1}{A} z - \frac{D}{A}, \quad y = \frac{1}{B} z - \frac{D}{B},$$

et on doit avoir (chap. II, prob. IV)

$$A = -a, \quad B = -b;$$

donc l'équation du plan perpendiculaire à la droite, devient

$$z + ax + by = D,$$

en observant qu'ici D reste indéterminé, parce que tout plan parallèle au précédent, reste perpendiculaire à la droite. Si le plan est donné, et qu'on cherche la droite qui lui est perpendiculaire, on aura ces équations

$$x + Az = \alpha, \quad y + Bz = \beta.$$

Problème VI. *Trouver la plus courte distance d'un point donné à un plan donné.*

L'équation du plan donné sera

$$z = Ax + By + D;$$

et celles de la droite cherchée, d'abord assujétie à passer par le point donné x', y', z', seront

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Or pour que la droite soit perpendiculaire au plan, il faut (prob. V) qu'on ait

$$a = -A, \quad b = -B;$$

ainsi les équations précédentes de la droite, deviendront

$$x - x' = - A(z - z'), \qquad y - y' = - B(z - z').$$

L'équation du plan pourra être mise sous la forme

$$z - z' - A(x - x') - B(y - y') = D + Ax' + By' - z';$$

et en désignant par x'', y'', z'' les coordonnées du point de rencontre de la perpendiculaire et du plan, on aura à évaluer $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ au moyen des trois équations ci-dessus, en y remplaçant x, y, z par x'', y'' et z'', ce qui donnera

$$z'' - z' = \frac{D + Ax' + By' - z'}{1 + A^2 + B^2},$$

$$y'' - y' = \frac{-B(D + Ax' + By' - z')}{1 + A^2 + B^2},$$

$$x'' - x' = \frac{-A(D + Ax'' + By' - z')}{1 + A^2 + B^2};$$

portant ces valeurs dans l'expression de la plus courte distance entre deux points donnés (185), on aura

$$\sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$$
$$= \frac{D + Ax' + By' - z'}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \ldots\ldots (1),$$

expression de la plus courte distance cherchée. Lorsque le point donné est à l'origine même des coordonnées, on a $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, ensorte que la plus courte distance que nous désignerons par P, devient

$$P = \frac{D}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \ldots\ldots (2).$$

Si le point donné est sur le plan, la quantité

$$D + Ax' + By' - z' = 0,$$

et la plus courte distance (1) est nulle, ce qui doit arriver.

Si la droite passant par le point x', y', z', est donnée,

et qu'on doive lui mener un plan perpendiculaire ; il suffira de changer dans la formule (1) A et B en $-a$ et $-b$, ce qui donnera pour la plus courte distance,

$$\frac{D-ax'-by'-z'}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \ldots\ldots (3),$$

et pour $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$,

$$P=\frac{D}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{z+ax+by}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \ldots (4),$$

en observant que l'équation du plan perpendiculaire à la droite, est (probl. V)

$$z+ax+by=D.$$

Nous donnerons une autre solution de cette question. Soit Π le plan donné ayant pour équation (191)

$$p=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma;$$

soient x', y', z' les coordonnées du point M′ duquel on abaisse une perpendiculaire sur Π, et P cette perpendiculaire : pour avoir les coordonnées de son pied M, on imaginera par M′ des parallèles aux trois axes, et par M des perpendiculaires sur ces parallèles ; on aura donc $x'+P\cos\alpha$, $y'+P\cos\beta$, $z'+P\cos\gamma$ pour les coordonnées de M. Comme M est un point du plan Π, ses coordonnées devront satisfaire à l'équation de Π, qui deviendra

$$p=(x'+P\cos\alpha)\cos\alpha+(y'+P\cos\beta)\cos\beta+(z'+P\cos\gamma)\cos\gamma,$$

et à cause de $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (189, probl. V), on aura simplement

$$p=x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z\cos\gamma+P,$$

d'où

$$P=p-(x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma),$$

équation cherchée dans laquelle $x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma$ représente la perpendiculaire abaissée de M′ sur un plan Π'

parallèle à Π, et passant par l'origine, ou bien encore la perpendiculaire menée de l'origine sur un plan Π' parallèle à Π, et menée par le point x', y', z'.

Corollaire. Reprenons l'expression ci-dessus,

$$P = \frac{D}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \frac{z+ax+by}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

en désignant par (P, x), (P, y), (P, z) les angles de P avec les trois axes, on a trouvé (probl. V, coroll. II)

$$\cos(P, x) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos(P, y) = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos(P, z) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

de ces substitutions faites dans l'expression de P, il résulte que

$$P = x\cos(P, x) + y\cos(P, y) + z\cos(P, z),$$

équation du plan démontrée (191). Lorsque le plan passe par l'origine, on a $P = 0$, et cette équation se réduit à

$$0 = x\cos(P, x) + y\cos(P, y) + z\cos(P, z).$$

C'est sous cette forme que l'illustre auteur de *la Mécanique analytique* emploie l'équation du plan.

Problème VII. *Trouver la plus courte distance entre un point donné et une droite donnée dans l'espace.*

Nous assujétirons d'abord un plan à passer par le point donné et à être perpendiculaire à la droite donnée; puis nous chercherons les coordonnées du point de rencontre de la droite et du plan, et nous n'aurons plus qu'à écrire l'expression de la distance entre ce point de rencontre et le point donné, laquelle sera la plus courte distance cherchée du point à la droite.

Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations de la droite donnée : on sait déjà (probl. V) que le plan perpendiculaire à la droite, a pour équation

$$z + ax + by = D:$$

assujétissons ce plan à passer par le point donné x', y', z', et son équation deviendra

$$z - z' + a(x - x') + b(y - y') = 0;$$

cherchons les coordonnées x'', y'', z'' du point de rencontre de la droite et du plan, et à cet effet, nous mettrons les équations de la droite sous la forme

$$x - x' = az + \alpha - x',$$
$$y - y' = bz + \beta - y';$$

et en observant que x, y, z, dans ces trois équations, deviennent x'', y'', z'', on trouvera facilement que

$$z'' = \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$y'' = \beta + \frac{b[a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z']}{1 + a^2 + b^2} = \beta + bz'',$$

$$x'' = \alpha + \frac{a[a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z']}{1 + a^2 + b^2} = \alpha + az''.$$

Il reste donc à substituer ces valeurs dans la formule de la plus courte distance

$$\sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}.$$

Lorsque la droite de l'espace, passe par l'origine des coordonnées, on a $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et

$$z'' = \frac{ax' + by' + z'}{1 + a^2 + b^2}, \quad y'' = bz'', \quad x'' = az''$$

sont les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée

de l'origine sur la droite passant par le point x', y', z'; et comme $\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}$ est la longueur de la droite, depuis l'origine jusqu'au point x'', y'', z'', on a, en désignant cette longueur par P',

$$P' = \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2} = \frac{ax'+by'+z'}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

expression de la longueur de la droite comprise entre l'origine des coordonnées et le pied de la perpendiculaire abaissée du point x', y', z' sur cette droite.

Problème VIII. *Trouver l'angle de deux droites* l, l' *données de position dans l'espace.*

Ce problème a été résolu (chap. XVI, probl. V); mais nous en donnerons une seconde solution déduite des formules (probl. VII). Soient

$$(1)\ldots\; x=az,\quad y=bz;\qquad x=a'z,\quad y=b'z\ldots(2),$$

les équations de deux droites l et l' ramenées parallèlement à elles-mêmes à passer par l'origine : si d'un point quelconque x', y', z' de la droite l', point que nous désignerons par N, on abaisse une perpendiculaire sur la droite l qui la rencontre en M (fig. 157), on aura le triangle AMN, rectangle en M, A désignant l'origine, lequel donnera

$$AN = P = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

et (probl. VII),

$$AM = P' = \frac{ax'+by'+z'}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

donc

$$\cos(l,l') = \frac{P'}{P} = \frac{ax'+by'+z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\times\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

$$= \frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}\times\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

après avoir remplacé x' et y' par $a'z'$ et $b'z'$.

Problème IX. *Trouver*, 1°. *l'angle de deux plans donnés*; 2°. *ceux d'un plan avec ses trois plans rectangulaires de projection.*

Soient

$$(1)\ldots Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0\ldots(2),$$

les équations des plans : si de l'origine on mène sur chacun d'eux une perpendiculaire, l'angle entre ces perpendiculaires sera le supplément de l'angle entre les plans, et conséquemment son cosinus sera, au signe près, le cosinus de l'angle entre les plans; les équations de ces droites seront

$$x=az,\quad y=bz;\qquad x=a'z,\quad y=b'z;$$

pour qu'elles soient perpendiculaires au plan, il faut qu'on ait (probl. V)

$$-a=-\frac{A}{C},\qquad -b=-\frac{B}{C},$$

$$-a'=-\frac{A'}{C'}.\qquad -b'=-\frac{B'}{C'},$$

substituant ces valeurs dans l'expression du cosinus de l'angle de deux droites dans l'espace (chap. XVI, probl. V), on a pour celui de l'angle des deux plans, que nous désignerons par V,

$$\cos V=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\times\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\ldots(3).$$

Corollaire I. La condition pour que deux plans soient rectangulaires, est donc

$$AA'+BB'+CC'=0\ (*).$$

(*) On peut énoncer autrement cette condition. A cet effet, imaginons de l'origine des coordonnées deux perpendiculaires p et p' sur les plans donnés supposés à angles droits, et soient x', y', z', x'', y'', z'' les coordonnées des deux points dans lesquels ces perpendiculaires rencontrent les plans : si on joint les extrémités z' et z'' par une ligne l, l sera l'hypoté-

Corollaire II. Si l'un des plans, celui de l'équation (2), coïncide avec le plan (x, y), on a

$$z = 0, \quad \text{d'où} \quad A' = 0, \quad B' = 0, \quad D' = 0;$$

et nommant V' l'angle correspondant, on trouve

$$\cos V' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

---

nuse d'un triangle rectangle, en observant que l'angle (p, p') est droit; on aura donc

$$l^2 = p^2 + p'^2,$$

c'est-à-dire,

$$(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2;$$

et, après les réductions,

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0 \ldots\ldots (1).$$

Telle est donc la condition qui doit avoir lieu entre les coordonnées x', y', z'; x'', y'', z'', pour que les deux plans qui leur répondent, se coupent à angles droits.

On peut encore énoncer cette relation au moyen des longueurs a, b, c, a', b', c' coupées sur les trois axes, à compter de l'origine, par les deux plans rectangulaires P et P'.

La perpendiculaire p projetée sur le plan des (xy), qui est celui des ab, sera aussi perpendiculaire à la trace du plan P sur le même plan: ainsi les coordonnées x', y' et la projection horizontale de p; les longueurs b, a et la trace horizontale du plan P, seront deux triangles semblables, comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires: on aura donc la proportion

$$x' : y' :: b : a :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b},$$

et celle-ci,

$$y' : z' :: c : b :: \frac{1}{b} : \frac{1}{c};$$

et conséquemment cette suite de rapports,

$$x' : y' : z' :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

On aura pareillement,

$$x'' : y'' : z'' :: \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'}.$$

De ces deux suites combinées avec la relation (1), on conclut facilement

Pareillement, si l'on désigne par V'', V''' les angles du même plan avec ceux des (xz) et des (yz), on obtient

$$\cos V'' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos V''' = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

et conséquemment,

$$\cos^2 V' + \cos^2 V'' + \cos^2 V''' = 1 \ldots\ldots (4).$$

Corollaire III. Si l'on désigne par U', U'', U''' les inclinaisons du second plan

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

sur les trois plans rectangulaires (xy), (xz) et (yz), on

$$\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'} = 0 \ldots\ldots (2),$$

autre relation remarquable entre les coordonnées des intersections des trois axes rectangulaires par les deux plans.

On peut traduire l'expression (3) du cos V au moyen des mêmes quantités a, b, c, a', b', c'.

Nous supposerons, pour plus de facilité, que les deux plans se soient mus parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à devenir également distans de l'origine A, hypothèse sous laquelle les perpendiculaires $p = AM$, $p' = AM'$ menées de l'origine sur ces plans, deviendront égales. Représentons par px, py, pz; $p'x$, $p'y$, $p'z$ les projections de ces perpendiculaires sur les axes des x, y et z; prolongeons la perpendiculaire MA d'une longueur $Am = AM$: alors les trois points M, M' et m seront sur la circonférence d'un cercle ayant son centre en A, et le triangle MM'm sera rectangle en M'. En abaissant de M' sur AM la perpendiculaire M'q, on aura

$$mq = \frac{\overline{mM'}^2}{mM}$$

et

$$Aq = \frac{\overline{mM'}^2}{2AM} - AM = \frac{\overline{mM'}^2 - 2\overline{AM}^2}{2AM} = \frac{2\overline{AM}^2 - \overline{MM'}^2}{2AM};$$

or,

aura de même,

$$\cos U' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos U'' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos U''' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}};$$

et, d'après l'expression (3),

$$\cos V = \cos V' \cos U' + \cos V'' \cos U'' + \cos V''' \cos U''' \ldots\ldots (5).$$

L'angle V étant droit, cette formule donne

$$\cos V' \cos U' + \cos V'' \cos U'' + \cos V''' \cos U''' = 0 \ldots . (6).$$

$$\overline{MM'}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z''),$$
$$2\overline{AM}^2 = 2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

en observant qu'à cause de $\overline{AM}^2 = \overline{AM'}^2$, on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

donc

$$Aq = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{AM},$$

et conséquemment,

$$\frac{Aq}{AM'} = \cos(p, p') = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{AM \times AM'}:$$

or des proportions trouvées dans la première partie de cette note, on tire

$$x' = \frac{by'}{a}, \quad z' = \frac{by'}{c}, \quad x'' = \frac{b'y''}{a'}, \quad z'' = \frac{b'y''}{c'}:$$

après les substitutions dans $\cos(p, p')$ et les réductions, on obtient

$$\cos(p, p') = \frac{\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \times \sqrt{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}}} \ldots\ldots (3).$$

Lorsque les deux perpendiculaires p et p' sont à angles droits, on retombe sur la relation (2).

1°. En désignant par t, t', t'' les projections de l'aire d'un triangle sur les plans (xz), (yz), (xy), et l'équation du plan qui contient le triangle, étant

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nous avons trouvé (probl. II)

$$t = \tfrac{1}{2}B, \quad t' = \tfrac{1}{2}A, \quad t'' = \tfrac{1}{2}C;$$

or T étant l'aire du triangle de l'espace, et P une perpendiculaire menée de l'origine sur le plan de ce triangle, nous démontrerons bientôt qu'on a

$$\frac{D}{6} = \frac{P}{3} \times T,$$

D ayant l'acception énoncée (probl. II) : d'ailleurs nous avons trouvé (probl. VI)

$$P = \frac{D}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}};$$

remplaçant dans cette expression A par $\frac{A}{-C}$, B par $\frac{B}{-C}$, D par $\frac{D}{-C}$, pour qu'elle convienne au plan de l'équation ci-dessus, on obtient

$$P = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

donc

$$\frac{D}{6} = \frac{D \times T}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

d'où

$$T^2 = \tfrac{1}{4}\left[A^2 + B^2 + C^2\right] = t^2 + t'^2 + t''^2,$$

et

$$T = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

et conséquemment,

$$\frac{T}{t} = \frac{1}{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}, \quad \frac{T}{t'} = \frac{1}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}, \quad \frac{T}{t''} = \frac{1}{\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}:$$

mais nous avons vu (probl. IX, cor. II) que ces expressions étaient celles des rapports du rayon aux cosinus des angles que fait le plan de T avec chacun des trois plans rectangulaires de projection : ainsi la première partie de la proposition se trouve démontrée.

2°. Supposons un polygone plan dans l'espace, décomposé en triangles T, S, R, etc. par des diagonales ; et nommons s, s', s'' les aires des projections de l'aire S : on a aussi, d'après le théorème (1°),

$$S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2,$$
etc.

or

$$T = \frac{t}{T}t + \frac{t'}{T}t' + \frac{t''}{T}t'',$$
$$S = \frac{s}{S}s + \frac{s'}{S}s' + \frac{s''}{S}s'',$$
etc.

Mais, d'après le premier théorème, et parce que les aires T, S, R, etc. sont dans un même plan, les rapports $\frac{T}{t}$, etc. sont égaux aux rapports $\frac{S}{s}$, etc., donc

$$\frac{t}{T} = \frac{s}{S}, \quad \frac{t'}{T} = \frac{s'}{S}, \quad \frac{t''}{T} = \frac{s''}{S}, \text{ etc.},$$

égalités qui donnent celles-ci

$$St = Ts, \qquad St' = Ts', \qquad St'' = Ts'', \text{ etc.},$$

ou

$$sSt = Ts^2, \quad s'St' = Ts'^2, \quad s''St'' = Ts''^2, \text{ etc.}$$

et conséquemment en les ajoutant et tenant compte de $S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2$, on a

$$TS = st + s't' + s''t'';$$

ainsi

$$(T+S)^2 = T^2 + 2ST + S^2$$
$$= t^2 + t'^2 + t''^2 + 2st + 2s't' + 2s''t'' + s^2 + s'^2 + s''^2,$$

et de là

$$(T+S)^2 = (t+s)^2 + (t'+s')^2 + (t''+s'')^2.$$

En prenant un troisième triangle R dans le plan des deux premiers, dont les projections soient r, r', r'', on arriverait à cette propriété,

$$(T+S+R)^2 = (t+s+r)^2 + (t'+r'+s')^2 + (t''+r''+s'')^2, \text{ etc.}$$

ce qui démontre la seconde partie de l'énoncé. Il est bien entendu que les carrés des aires, sont les carrés des nombres qui les expriment.

Théorème II. *La projection orthogonale d'une aire quelconque sur un plan, est égale à la somme des projections de projections formées, en projetant d'abord cette aire sur trois plans rectangulaires, ensuite en projetant ces projections sur le plan proposé.*

Soient S une surface plane dans l'espace, A, A', A'' ses trois projections sur les trois plans rectangulaires (xy), (xz), (yz); B la projection de S sur un autre plan, et V l'angle du plan de S avec celui de B : on aura (théor. I)

$$B = S \cos V;$$

mais en désignant par $\cos p$, $\cos p'$, $\cos p''$ les cosinus des angles de S avec les trois plans rectangulaires des projections A, A', A'', on a (théor. I)

$$A = S \cos p, \qquad A' = S \cos p', \qquad A'' = S \cos p'':$$

si l'on désigne par α, β, γ les inclinaisons du plan de B sur les plans rectangulaires A, A', A'', on aura [probl. IX, form. (5)],

$$\cos V = \cos\alpha . \cos p + \cos\beta \cos p' + \cos\gamma \cos p'',$$

et en multipliant chaque membre par S, on obtient

$$B = A \cos\alpha + A' \cos\beta + A'' \cos\gamma \ldots (1),$$

ce qui est la propriété énoncée.

Si B', B'' représentent les projections de S sur deux autres plans perpendiculaires entr'eux et à celui qui contient B, on aura de même

$$B' = A \cos \alpha' + A' \cos \beta' + A'' \cos \gamma' \ldots (2),$$
$$B'' = A \cos \alpha'' + A'' \cos \beta'' + A''' \cos \gamma'' \ldots (3),$$

α', β', γ' étant les inclinaisons de B' sur les plans rectangulaires A, A', A'', et α'', β'', γ'' celles de B'' sur les mêmes plans.

On a, en même temps (Théor. I),

$$S^2 = A^2 + A'^2 + A''^2,$$
$$S^2 = B^2 + B'^2 + B''^2;$$

donc

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = B^2 + B'^2 + B''^2,$$

résultat qui apprend que quelle que soit la position des trois plans rectangulaires de projection, qui forment le second système, la somme $B^2 + B'^2 + B''^2$ sera toujours constante pour une même valeur de S. On tire de là

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2}.$$

Ainsi la plus grande valeur que puisse avoir la projection B, est celle qui répond à $B' = 0$, $B'' = 0$.

Le plan qui répond à cette plus grande projection B, joue un rôle très-important en mécanique : voici de quelle manière on le détermine. Si l'on multiplie (1) par $\cos \alpha$, (2) par $\cos \alpha'$, et (3) par $\cos \alpha''$, si l'on ajoute ces trois produits, et qu'on réduise d'après les équations (probl. IX, coroll. IV), on trouvera

$$A = B \cos \alpha + B' \cos \alpha' + B'' \cos \alpha'' \ldots (4):$$

on aurait de même

$$A' = B \cos \beta + B' \cos \beta' + B'' \cos \beta'' \ldots (5),$$
$$A'' = B \cos \gamma + B' \cos \gamma' + B'' \cos \gamma'' \ldots (6),$$

en observant que α et β désignant les inclinaisons sur le plan B des plans (xy), (xz); α' et β' celles des mêmes plans sur le plan B'; et enfin α'' et β'' celles des mêmes plans sur B'': or, sous les hypothèses $B' = 0$, $B'' = 0$, ces expressions deviennent

$$A = B \cos \alpha, \quad A' = B \cos \beta, \quad A'' = B \cos \gamma.$$

Soit

$$z = Mx + Ny + P \ldots\ldots (7),$$

l'équation du plan de B, rapporté aux plans de A, A', A'' rectangulaires entr'eux, et représentant les plans (xy), (xz), (yz) : on a (probl. IX, coroll. II)

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+1}},$$

$$\cos \beta = \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+1}},$$

$$\cos \gamma = \frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+1}}.$$

Pour avoir l'angle φ de la trace de B dans le plan A avec l'axe des x, on fera $z = 0$ dans (7), ce qui donnera

$$y = -\frac{M}{N}x - \frac{P}{M},$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{M}{N} = -\frac{\cos \gamma}{\cos \beta} = -\frac{\frac{A''}{B}}{\frac{A'}{B}} = -\frac{A''}{A'} \ldots (8),$$

et d'ailleurs,

$$\cos \alpha = \frac{A}{B} = \frac{A}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}} \ldots\ldots (9).$$

Ainsi lorsqu'on connaîtra les projections A, A', A'' sur trois plans rectangulaires pris arbitrairement, la position du plan de la plus grande projection, se déterminera immédiatement

à l'aide des formules (8) et (9), et on observera que les déterminations de α et de φ conviennent à une série de plans parallèles sur lesquels les projections de S seraient égales.

Problème XI. *Trouver l'expression de la solidité d'une pyramide triangulaire, au moyen des coordonnées des sommets des angles trièdres.*

Nous supposerons que l'un des quatre angles trièdres, soit à l'origine même des coordonnées, et nous désignerons par $x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''$ les coordonnées des angles solides M', M'', M''' de l'espace.

D'abord si l'on forme les neuf quantités

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \xi = y''z''' - z''y''' & \eta = z''x''' - x''z''' & \zeta = x''y''' - y''x''' \\ \xi' = z'y''' - y'z''' & \eta' = x'z''' - z'x''' & \zeta' = y'x''' - x'y''' \\ \xi'' = y'z'' - z'y'' & \eta'' = z'x'' - x'z'' & \zeta'' = x'y'' - y'x'' \end{array}\right\}\ldots(1);$$

je dis qu'en supposant les six équations suivantes dont les trois premières expriment les carrés des distances de l'origine aux points M', M'', M''',

$$\left.\begin{array}{l|l} x'^2 + y'^2 + z'^2 = m & x''x''' + y''y''' + z''z''' = n \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = m' & x'x''' + y'y''' + z'z''' = n' \\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = m'' & x'x'' + y'y'' + z'z'' = n'' \end{array}\right\}\ldots(2),$$

et faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l|l} \alpha = m'm'' - n^2 & \beta = n'n'' - mn \\ \alpha' = mm'' - n'^2 & \beta' = nn'' - m'n' \\ \alpha'' = mm' - n''^2 & \beta'' = nn' - m''n'' \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3);$$

on aura de même

$$\left.\begin{array}{l|l} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \alpha & \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \beta \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \alpha' & \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = \beta' \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = \alpha'' & \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \beta'' \end{array}\right\}\ldots\ldots(4),$$

comme on peut s'en assurer par la substitution des valeurs de $\xi, \xi' \ldots, \eta, \eta' \ldots, \zeta, \zeta' \ldots, \alpha, \alpha' \ldots, \beta, \beta' \ldots$ en $x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''$.

Posant encore

$$\Delta = x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z') \ldots (5),$$

on trouverait

$$\left.\begin{array}{l} z'\zeta + x'\xi + y'\eta = \Delta \\ z'\zeta' + x'\xi' + y'\eta' = 0 \\ z'\zeta'' + x'\xi'' + y'\eta'' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (6).$$

On sait que f, g, h étant les trois côtés d'un triangle rectiligne, son aire est exprimée par

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{[2f^2g^2 + 2f^2h^2 + 2g^2h^2 - f^4 - g^4 - h^4]} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{[4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2]} \ldots\ldots (7): \end{aligned}$$

ainsi pour le triangle M′M″M‴ dont nous représenterons les côtés par $\sqrt{c'''}$, $\sqrt{c''}$, $\sqrt{c'}$, on aura

$$16\mathrm{E}^2 = 4c'c'' - (c' + c'' - c''')^2;$$

or en observant que les quantités

$$m + m' - 2n'', \quad m + m'' - 2n', \quad m' + m'' - 2n$$

expriment les carrés des distances entre les points M′ et M″, M′ et M‴, M″ et M‴, lesquelles sont aussi c''', c'', c', on aura

$$\begin{aligned} 4\mathrm{E}^2 &= (m' + m'' - 2n)(m + m'' - 2n') - (m'' - n - n' + n'')^2 \\ &= mm' + mm'' + m'm'' - 2mn - 2m'n' - 2m''n'' \\ &\qquad + 2nn' + 2nn'' + 2n'n'' - n^2 - n'^2 - n''^2 \\ &= \alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta'' \ldots\ldots\ldots\ldots (7'); \end{aligned}$$

donc l'expression (7) devient

$$\mathrm{E} = \frac{\sqrt{[\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta'']}}{2} \ldots\ldots (8).$$

Il faut maintenant trouver la hauteur P de la pyramide, c'est-à-dire, la longueur d'une perpendiculaire menée de l'origine sur le plan des points M′, M″, M‴. Or l'équation

du plan étant

$$z = Ax + By + D,$$

on a pour les points M', M'', M''' par lesquels il doit passer, ces trois conditions

$$z' = Ax' + By' + D,$$
$$z'' = Ax'' + By'' + D,$$
$$z''' = Ax''' + By''' + D,$$

desquelles on tire

$$A = -\frac{y'(z''-z''') + y''(z'''-z') + y'''(z'-z'')}{x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'')},$$
$$B = -\frac{z'(x''-x''') + z''(x'''-x') + z'''(x'-x'')}{x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'')}.$$

En développant les termes et introduisant les abréviations (1), on trouve

$$A = -\frac{\xi + \xi' + \xi''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}, \quad B = -\frac{\eta + \eta' + \eta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''} \ldots\ldots (9);$$

ensuite l'équation

$$z' = Ax' + By' + D$$

donnera

$$D = z' - Ax' - By'$$
$$= \frac{z'(\zeta + \zeta' + \zeta'') + x'(\xi + \xi' + \xi'') + y'(\eta + \eta' + \eta'')}{\zeta + \zeta' + \zeta''},$$

et d'après les équations (6),

$$D = \frac{\Delta}{\zeta + \zeta' + \zeta''} \ldots (10).$$

Or on a trouvé (probl. VII)

$$P = \frac{D}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}:$$

substituant pour A, B, D leurs valeurs trouvées (9) et

(10), il viendra

$$P=\frac{\Delta}{\sqrt{[(\zeta+\zeta'+\zeta'')^2+(\xi+\xi'+\xi'')^2+(\nu+\nu'+\nu'')^2]}},$$

c'est-à-dire, en développant les termes qui sont sous le radical, et faisant les substitutions en α, α', α'', β, β', β'' données par (4),

$$P=\frac{\Delta}{\sqrt{[\alpha+\alpha'+\alpha''+2\beta+2\beta'+2\beta'']}}\ldots\ldots(11);$$

donc enfin, en multipliant (8) par (11), il vient

$$\frac{E.P}{3}=\frac{\Delta}{6}=$$

$$\tfrac{1}{6}[x'(y''z'''-y'''z'')+x''(y'''z'-y'z''')+x'''(y'z''-y''z')],$$

or la quantité entre parenthèses étant l'expression de D (probl. II), on a

$$D=6\times\frac{E.P}{3}=6 \text{ vol. de la pyr.},$$

propriété dont la démonstration est due à l'illustre *Lagrange*, qui de la même analyse a conclu l'expression du volume d'un parallélepipède quelconque, en fonction des trois arêtes contiguës à l'angle solide qui est l'origine des coordonnées, et des angles entre les arêtes; mais on peut parvenir à cette même formule qui nous sera nécessaire par la suite, d'une manière plus expéditive, sans employer néanmoins d'autre considération que celle des coordonnées rectangles.

Supposons, pour simplifier, que la base ANN''N' du parallélepipède soit sur le plan des (xy), que l'un de ses angles solides coïncide avec l'origine A (fig. 158) des coordonnées, que des trois arêtes a, b, c, contiguës à cet angle, et dont les deux premierssont dans le plan (xy), l'une $a=$AN se confonde avec l'axe des x, et l'autre b soit AN'; enfin, soient

$$\text{ang.}(c,b)=\alpha,\ \text{ang.}(c,a)=\beta,\ \text{ang.}(a,b)=\gamma:$$

l'aire de la base étant $a\,b\sin\gamma$, le volume V sera

$$V=abz\sin\gamma,$$

z étant la hauteur du parallélepipède, c'est-à-dire, la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M de l'arête c sur la base : il reste à trouver z en fonction des données. Si de M on abaisse une perpendiculaire $Mm' = p$ sur l'axe des x, c'est-à-dire, sur la direction de a, on aura

$$p = c \sin \mathcal{C}, \qquad z = \sqrt{p^2 - y^2} = \sqrt{c^2 \sin^2 \mathcal{C} - y^2},$$

z étant l'ordonnée de l'extrémité de c. Or m, projection de M sur la base, ayant pour coordonnées x et y, et x', y' étant celles du point N', si l'on pose $Am = k$, $mN' = n$, on aura

$$x^2 + y^2 = k^2, \qquad x'^2 + y'^2 = b^2,$$
$$(x - x')^2 + (y - y') = n^2,$$

d'où l'on tire

$$xx' + yy' = \frac{k^2 + b^2 - n^2}{2} = bk \cos(b, k)$$
$$= bc \cos(b, k).\cos(c, k),$$

à cause de $k = c \cos(c, k)$. Si de l'extrémité M de l'arête c dont la projection horizontale est k, on abaisse sur b une perpendiculaire, et que la portion de b entre A et le pied de cette perpendiculaire soit b', on aura

$$\cos(b, k) = \frac{b'}{k}, \quad \text{d'ailleurs} \quad \cos(k, c) = \frac{k}{c},$$

donc

$$\cos(b, k).\cos(c, k) = \frac{b'}{c} = \cos(b, c) = \cos \alpha,$$

ensorte que

$$xx' + yy' = bc \cos \alpha, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{bc \cos \alpha - xx'}{y'}.$$

Mais

$$x = c \cos(a, c) = c \cos \mathcal{C}, \qquad x' = b \cos(a, b) = b\gamma,$$
$$y' = b \sin(a, b) = b \sin \gamma;$$

donc

$$y = \frac{c(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}{\sin\gamma},$$

et après les substitutions faites dans la valeur de z,

$$z = \frac{c}{\sin\gamma}\sqrt{[\sin^2\beta\sin^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2]},$$

et

$$\begin{aligned} V &= abc\sqrt{[1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma]} \\ &= abc\sqrt{[1-\cos^2(c,b)-\cos^2(c,a)-\cos^2(a,b)} \\ &\qquad \overline{+2\cos(c,b)\cos(c,a)\cos(a,b)]}. \end{aligned}$$

Problème XII. *Deux droites étant données dans l'espace, trouver*, 1°. *les équations de la droite qui est en même temps perpendiculaire à l'une et à l'autre, et sur laquelle se mesure leur plus courte distance;* 2°. *l'expression de cette plus courte distance.*

Soit l l'une de ces droites ayant pour équations

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta;$$

soit l' la seconde droite ayant pour équations

$$x = a'z + \alpha', \qquad y = b'z + \beta':$$

nous écrirons que par chacune de ces droites on mène un plan, et que ces plans sont parallèles. La droite l perce le plan des (xy) en un point r dont les coordonnées sont

$$z = 0, \qquad y = \beta, \qquad x = \alpha;$$

la droite l' perce le même plan en un point r' dont les coordonnées sont

$$z = 0, \qquad y = \beta', \qquad x = \alpha':$$

pour dire qu'un plan

$$z = Ax + By + D$$

contient la droite l, on emploie (probl. III) les conditions

$$(1)\ldots Aa + Bb = 1, \qquad A\alpha + B\beta + D = 0\ldots(2);$$

la valeur de D tirée de (2) et reportée dans l'équation du plan, la change dans celle-ci,

$$z = A(x-\alpha) + B(y-\beta),$$

et il reste la condition (1).

Pour dire aussi qu'un plan

$$z = A'x + B'y + D'$$

contient la droite l', on aura

$$z = A'(x-\alpha') + B'(y-\beta'),$$

avec la condition

$$A'a' + B'b' = 1 \ldots\ldots (3);$$

mais les deux plans doivent être parallèles; donc

$$A = A', \qquad B = B'$$

et

$$\left.\begin{array}{l} z = A(x-\alpha) + B(y-\beta) \\ z = A(x-\alpha') + B(y-\beta') \end{array}\right\} \ldots (4);$$

d'ailleurs des conditions (1) et (3), en faisant dans cette dernière, $A'=A$, $B'=B$, on déduit

$$A = \frac{b'-b}{ab'-a'b}, \qquad B = \frac{a-a'}{ab'-a'b},$$

valeurs qu'on portera pour A et B dans les équations (4). Il s'agit actuellement de trouver l'équation d'une perpendiculaire à ces plans parallèles, et dont les extrémités soient sur chacune des droites l et l'. A cet effet, nous supposerons par le point r où la droite l perce le plan (xy), une perpendiculaire P au plan mené par l', et par r' point où la droite l' perce le même plan (xy), une perpendiculaire P' au plan mené par l; puis par P et l un plan qui sera perpendiculaire au plan par l', et par P' et l' un plan qui sera perpendiculaire au plan par l; ces deux plans se couperont suivant une droite perpendiculaire à chacun des plans parallèles, droite dont les extrémités seront sur les lignes l, l'; ensorte qu'elle sera la plus courte distance en position vraie.

La perpendiculaire P menée de r dont les coordonnées sont α et β au plan de l', a pour équations (probl. V)

$$x = -Az + \alpha, \qquad y = -Bz + \beta;$$

la perpendiculaire menée de r' dont les coordonnées sont α' et β' au plan de l, a pour équations

$$x = -Az + \alpha', \qquad y = -Bz + \beta';$$

le plan mené par l et la perpendiculaire P qui part de r, a pour équation

$$z = L(x - \alpha) + M(y - \beta) \ldots\ldots (5),$$

et les conditions d'après lesquelles ce plan passe par ces deux droites, sont

$$(6) \ldots\ldots La + Mb = 1, \qquad LA + MB = -1 \ldots\ldots (7):$$

le plan mené par l' et la perpendiculaire P' qui part de r', a pour équation

$$z = L'(x - \alpha') + M'(y - \beta') \ldots\ldots (8),$$

L' et M' étant déterminées par les équations

$$(9) \ldots\ldots L'a' + M'b' = 1, \qquad L'A + M'B = -1 \ldots\ldots (10).$$

Après la substitution dans ces quatre équations, des valeurs de A et B trouvées plus haut, on pourra évaluer L, M, L' et M' en a, a', b et b' : ces valeurs reportées dans (5) et (8), donneront, après l'élimination successive de x et de y, les équations des projections de la plus courte distance sur les plans (yz), (xz).

Nous chercherons enfin la longueur absolue de la plus courte distance. Si de l'origine des coordonnées, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des plans parallèles, la différence entre la plus grande perpendiculaire et la plus petite, sera en longueur la plus courte distance entre les droites.

La perpendiculaire menée de l'origine sur le plan passant par l, a pour expression (probl. VI)

$$P = -\frac{A\alpha + B\beta}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}},$$

en observant que, pour ce plan qui a pour équation

$$z = A(x - \alpha) + B(y - \beta),$$

on a

$$D = -(A\alpha + B\beta);$$

la perpendiculaire menée de l'origine au plan par l', a pour expression

$$P' = -\frac{A\alpha' + B\beta'}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}};$$

la différence

$$P' - P = \frac{A(\alpha - \alpha') + B(\beta - \beta')}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{(\alpha - \alpha')(b' - b) - (\beta - \beta')(a' - a)}{\sqrt{[(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (a'b - ab')^2]}},$$

après avoir remplacé A et B par leurs valeurs.

Corollaire. Lorsque les droites données se rencontrent, cette distance est nulle, et on a

$$(\alpha - \alpha')(b' - b) - (\beta - \beta')(a' - a) = 0,$$

relation déjà trouvée (probl. III), et qui exprime que deux droites se coupent dans l'espace.

CHAPITRE XVIII.

Transformation des coordonnées en trois dimensions.

193. Ce chapitre offre pour l'espace des formules analogues à celles que nous avons données dans le chapitre III, pour un plan, formules au moyen desquelles on peut débarrasser l'équation générale du second degré entre trois variables, de plusieurs de ses termes, sans lui rien faire perdre de sa généralité.

Problème I. *Passer d'une origine à une autre, les nouveaux axes étant respectivement parallèles aux premiers.*

Les coordonnées de la nouvelle origine rapportée à l'ancienne, étant a, b, c, on a ces relations

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z',$$

x, y, z étant les coordonnées primitives, et x', y', z' les nouvelles coordonnées parallèles aux précédentes, et comptées de la nouvelle origine.

Problème II. *Passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées aussi rectangulaires.*

Soient AX, AY, AZ les axes d'un des systèmes, et x, y, z les coordonnées correspondantes : soient AX', AY', AZ' les axes d'un autre système, et x', y', z' les coordonnées correspondantes ;

Que l'axe AX fasse avec les axes AX', AY', AZ' les angles α, α', α'';

Que l'axe AY fasse avec les mêmes axes, les angles β, β', β'';

Que l'axe AZ fasse avec les mêmes axes, les angles γ, γ', γ''.

Par l'extrémité X de l'axe $AX = x$, soit conçu un plan Π perpendiculaire à AX; on aura (191) cette équation de Π rapportée aux axes AX', AY', AZ' par les coordonnées x', y', z',

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' + z' \cos \alpha'' \ldots. (1);$$

concevant de même un plan Π' mené par l'extrémité Y de l'axe AY, et perpendiculairement à AY; un autre plan Π mené par l'extrémité de AZ, et perpendiculairement à AZ; on aura ces deux équations,

$$y = x' \cos \beta + y' \cos \beta' + z' \cos \beta'' \ldots. (2),$$
$$z = x' \cos \gamma + y' \cos \gamma' + z' \cos \gamma'' \ldots. (3).$$

Telles sont les relations entre les coordonnées du premier système, celles du second et les angles entre chacun des axes primitifs et les axes variés.

Pour avoir les relations réciproques, on multipliera les deux membres de (1) par $\cos \alpha$, ceux de (2) par $\cos \beta$, ceux de (3) par $\cos \gamma$, et en tenant compte des relations démontrées (chap. XVII, probl. IX), savoir :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \ldots.. (4),$$
$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0 \ldots.. (5),$$
$$\cos \alpha \cos \alpha'' + \cos \beta \cos \beta'' + \cos \gamma \cos \gamma'' = 0 \ldots.. (6),$$

on trouve

$$x' = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (7);$$

on obtiendrait pareillement,

$$y' = x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma' \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$
$$z' = x \cos \alpha'' + y \cos \beta'' + z \cos \gamma'' \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

sous les conditions

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1 \ldots\ldots (10),$$
$$\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'' = 1 \ldots\ldots (11),$$
$$\cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'' = 0 \ldots\ldots (12),$$

Problème III. *Passer d'un système de coordonnées rectangulaires* x, y, z *à un système de coordonnées obliques* x', y', z'.

Soit (fig. 159) M le point de l'espace, rapporté aux axes rectangulaires AX, AY, AZ par les coordonnées rectangulaires x, y, z, et aux axes obliques AX', AY', AZ' par les coordonnées x', y', z'; la ligne AM sera, en même temps, la diagonale de deux parallélepipèdes, l'un rectangle construit sur x, y, z, l'autre oblique construit sur x', y', z': on observera que le plan des $x'y'$ n'est pas le même que celui des xy, et que ces deux plans ont un point commun qui est l'origine.

Soient Am', $m'm''$, m''M les trois coordonnées obliques x', y', z' : si des points M, m'', m', on mène les perpendiculaires MP, $m''p''$, $m'p'$ sur l'axe AX, la somme des trois projections Ap', $p'p''$, p''P, que nous désignerons par $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, sera égale à l'abscisse x : on aura donc

$$x = x_{,} + x_{,,} + x_{,,,} \ldots\ldots (13).$$

Pareillement si l'on désigne par $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$; $z_{,}$, $z_{,,}$, $z_{,,,}$, les projections des trois mêmes coordonnées sur les deux autres axes Y et Z, on aura

$$y = y_{,} + y_{,,} + y_{,,,} \ldots\ldots (14),$$
$$z = z_{,} + z_{,,} + z_{,,,} \ldots\ldots (15).$$

Si l'on dénote par (x', x), (x', y), (x', z) ; (y', x), (y', y), (y', z) ; (z', x), (z', y), (z', z), les angles de chacun des axes AX′, AY′, AZ′ avec les axes primitifs AX, AY, AZ, on trouvera facilement (*)

$$\begin{array}{lll} x_{,} = x'\cos(x',x), & y_{,} = x'\cos(x',y), & z_{,} = x'\cos(x',z), \\ x_{,,} = y'\cos(y',x), & y_{,,} = y'\cos(y',y), & z_{,,} = y'\cos(y',z), \\ x_{,,,} = z'\cos(z',x), & y_{,,,} = z'\cos(z',y), & z_{,,,} = z'\cos(z',z). \end{array}$$

Ainsi les formules (13), (14) et (15) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos(x',x) + y'\cos(y',x) + z'\cos(z',x) \\ y = x'\cos(x',y) + y'\cos(y',y) + z'\cos(z',y) \\ z = x'\cos(x',z) + y'\cos(y',z) + z'\cos(z',z) \end{array}\right\}\ldots(16).$$

On a en même temps les six équations de condition,

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2(x',x) + \cos^2(x',y) + \cos^2(x',z) = 1 \\ \cos^2(y',x) + \cos^2(y',y) + \cos^2(y',z) = 1 \\ \cos^2(z',x) + \cos^2(z',y) + \cos^2(z',z) = 1 \end{array}\right\}\ldots(17).$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(y',z') = \cos(y',x)\cos(z',x) + \cos(y',y)\cos(z',y) \\ \qquad\qquad + \cos(y',z)\cos(z',z) \\ \cos(x',z') = \cos(x',x)\cos(z',x) + \cos(x',y)\cos(z',y) \\ \qquad\qquad + \cos(x',z)\cos(z',z) \\ \cos(x',y') = \cos(x',x)\cos(y',x) + \cos(x',y)\cos(y',y) \\ \qquad\qquad + \cos(x',z)\cos(y',z) \end{array}\right\}\ldots(18).$$

(*) Ces égalités se déduiront de cette propriété. Soit (fig. 160) une ligne droite MM′ située d'une manière quelconque dans l'espace, et qui ne soit pas dans un même plan avec l'axe AX : si par M, on mène une parallèle Mm à AX, AX et Mm seront dans un même plan : du point M′ abaissons une perpendiculaire M′N′ sur ce plan, et de N′ sur Mm une perpendiculaire N′m qui, prolongée, le sera en n′ sur AX : on sait qu'en joignant M′ avec m et n′; les lignes M′m et M′n′ seront perpendiculaires sur Mm et AX : ainsi nn′ étant la projection de MM′ sur AX, on aura

$$Mm = nn' = MM' \cos M'Mm.$$

Remarque. Les formules (16) servent encore à passer d'un système de coordonnées x, y, z rectangulaires à un autre système de coordonnées x', y' z' pareillement rectangulaires ; mais alors dans les équations de condition (18), on a

$$\cos(y', z') = 0, \quad \cos(x', z') = 0, \quad \cos(x', y') = 0.$$

Dans les formules (16), on peut remplacer les neuf angles (x', x), (y', y), etc. par trois angles seulement, savoir, 1°. l'angle entre l'axe des x' et sa projection sur le plan (x, y) ; 2°. l'angle entre cette projection et l'axe des x ; 3°. l'angle d'inclinaison du plan $(x'y')$ sur le plan (xy), données qui suffisent en supposant les trois nouvelles coordonnées x', y', z' rectangulaires.

Soient (fig. 161) AX′, AY′, AZ′ les nouveaux axes rectangulaires entr'eux, et AR la trace du plan $(x'y')$ dans le plan (x, y) ; concevons une sphère dont le centre soit en A, et dont le rayon $AT = 1$; et imaginons des arcs de grands cercles TQ, QRS, TR, TS : les côtés TR, TQ, RQ du triangle sphérique TRQ seront respectivement ψ, (x', x) et φ, et l'angle en R dans le triangle sphérique TRQ, lequel est celui des deux tangentes en R aux arcs RT, RQ, sera l'angle θ d'inclinaison du plan TAR sur QAR, ou du plan $(x'y')$ sur le plan (xy) ; ainsi le triangle sphérique TRQ fournira une relation entre (x', x), ψ, φ et θ.

Le triangle sphérique STR dans lequel l'arc $ST = (x', y)$, $TR = \psi$, $SR = \frac{\pi}{2} - QR = \frac{\pi}{2} - \varphi$, et l'angle $TRS = \pi - \theta$ fournira une relation entre (x', y), ψ, φ et θ.

Si par l'axe des z et par celui des x', on fait passer un arc de grand cercle $ZTP = \frac{\pi}{2}$, le triangle sphérique PRT rectangle en P, donnera une relation entre $PT = \frac{\pi}{2} - (x', z)$, $TRP = \theta$ et $TR = \psi$.

Ayant ainsi évalué $\cos(x', x)$, $\cos(x', y)$, $\cos(x', z)$,

et, de la même manière, $\cos(y', x)$, $\cos(y', y)$, $\cos(y', z)$, $\cos(z', x)$, $\cos(z', y)$, $\cos(z', z)$ en lignes trigonométriques relatives aux angles ψ, φ, θ, on en portera les valeurs dans les formules (16), et on obtiendra les formules cherchées.

Cette formule démontrée (Trig. sphér.),

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \ldots\ldots (M),$$

dans laquelle a, b, c sont les côtés d'un triangle sphérique, et A l'angle opposé au côté a, donne pour le triangle RTQ,

$$a = TQ = (x', x), \qquad b = TR = \psi,$$
$$c = RQ = \varphi, \qquad A = TRQ = \theta,$$

et conséquemment,

$$\cos(x', x) = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \cos\theta \ldots\ldots (19).$$

Pour le triangle STR, on a

$$a = ST = (x', y), \qquad b = SR = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$
$$c = TR = \psi, \qquad A = TRS = \pi - \theta,$$

et conséquemment,

$$\cos(x', y) = \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta \ldots\ldots (20).$$

Dans le triangle PRT, rectangle en P, on part de cette propriété, que les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés, ensorte que

$$\sin TRP : \sin TPR :: \sin TP : \sin TR.$$

Mais

$$TRP = \theta, \quad TPR = \frac{\pi}{2}, \quad TR = \psi \quad TP = \frac{\pi}{2} - (x', z);$$

donc

$$\cos(x', z) = \sin\psi \sin\theta \ldots\ldots (21).$$

Evaluons $\cos(y', x)$, $\cos(y', y)$, $\cos(y', z)$. Soit AY' (fig. 162) l'axe des y', perpendiculaire à celui des x' : dans

les deux triangles sphériques URQ, URS, on a

$$UQ=(y',x),\ UR=UT+TR=\frac{\pi}{2}+\psi,\ QR=\varphi,\ URQ=\theta,$$

$$US=(y',y),\ RS=QS-QR=\frac{\pi}{2}-\varphi \text{ et } URS=\frac{\pi}{2}-\theta :$$

or en faisant dans la formule (M), pour le triangle URQ, $a=(y',x)$, $b=\frac{\pi}{2}+\psi$, $c=\varphi$, $A=\theta$, on trouve

$$\cos(y',x)=-\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta\ldots.(22),$$

et pour le triangle URS, $a=(y',y)$, $b=\frac{\pi}{2}-\varphi$, $c=\psi+\frac{\pi}{2}$; $A=\pi-\theta$,

$$\cos(y',y)=-\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi\cos\theta\ldots..(23).$$

Si par les axes z et y', on conçoit un arc de grand cercle jusqu'au plan (xy) qu'il rencontre en L, l'arc ZUL sera $=\frac{\pi}{2}$: dans le triangle sphérique rectangle URL, on a

$$\sin UL : \sin URL :: \sin UR : 1;$$

mais

$$UL=\frac{\pi}{2}-ZU=\frac{\pi}{2}-(y',z),\ UR=\frac{\pi}{2}+\psi,\ URL=\theta :$$

donc la proportion précédente donne

$$\cos(y',z)=\sin\theta\cos\psi\ldots..(24).$$

Evaluons enfin $\cos(z',x)$, $\cos(z',y)$, $\cos(z',z)$. Soit (fig. 163) AZ' l'axe des z' perpendiculaire au plan $(x'y')$; si l'on imagine les arcs de grands cercles VNQ dans le plan $(z'x)$, TRK dans le plan $(x'y')$, et VSK dans le plan $(z'y)$; les deux triangles sphériques NRQ, KSR seront visiblement rectangles, l'un en N, l'autre en K; car, 1°. dans le premier, l'arc TRK est décrit dans le plan $(x'y')$, et cet arc est rencontré à angle droit par l'arc VQ, décrit dans le plan $(z'x)$ par le rayon

AV, perpendiculaire au plan $(x'y')$; ainsi

$$(z', x) = \frac{\pi}{2} + NQ,$$

d'où

$$NQ = (z', x) - \frac{\pi}{2}, \quad QR = \varphi, \quad NRQ = \theta,$$

et on a la proportion

$$\sin NQ : \sin QR :: \sin NRQ : 1;$$

donc

$$-\cos(z', x) = \sin\varphi \sin\theta \ldots\ldots (25).$$

2°. Dans le triangle KRS, l'arc TRK décrit dans le plan $(x'y')$, est rencontré à angles droits en K, au-dessous de (xy), par l'arc VSK décrit dans le plan $(z'y)$ par le rayon AV, perpendiculaire à $(x'y')$; donc

$$(z', y) = VK - SK = \frac{\pi}{2} - SK,$$

d'où

$$KS = \frac{\pi}{2} - (z', y), \quad RS = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad KRS = NRQ = \theta;$$

donc

$$\sin KS : \sin SR :: \sin KRS : 1,$$

d'où

$$\cos(z', y) = \cos\varphi \sin\theta \ldots\ldots (26).$$

Enfin l'angle (z', z) est l'angle entre les plans $(x'y')$ et (xy) que nous avons appelé θ; donc

$$\cos(z', z) = \cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (27).$$

La substitution de ces cosinus dans les formules (16), donne les suivantes,

$$\left.\begin{aligned}
x = {} & x'(\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi) \\
& + y'(\cos\theta\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi) \\
& - z'\sin\theta\sin\varphi, \\
y = {} & x'(\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\cos\varphi\sin\psi) \\
& - y'(\cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\
& + z'\sin\theta\cos\varphi, \\
z = {} & x'\sin\theta\sin\psi + y'\sin\theta\cos\psi + z'\cos\theta,
\end{aligned}\right\} \ldots (28).$$

desquelles on déduit

$$\left.\begin{aligned}
x' = &\quad x(\cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi) \\
&+ y(\sin\varphi \cos\psi - \cos\theta \cos\varphi \sin\psi) \\
&+ z \sin\theta \sin\psi, \\
y' = &\quad x(\cos\theta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi) \\
&- y(\cos\theta \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi) \\
&+ z \sin\theta \cos\varphi, \\
z' = &- x \sin\theta \sin\varphi + y \sin\theta \cos\varphi + z \cos\theta,
\end{aligned}\right\} \ldots (29).$$

Pour faire coïncider les formules (28) avec celles de M. *Laplace*, il faut changer ψ en φ, et réciproquement, faire $\sin\theta$ négatif, et prendre la valeur de y en moins, changemens qui résultent de la disposition des axes. Si de plus on fait $\varphi = 0$ pour faire rentrer l'axe des x' dans le plan (xy), on aura

$$\left.\begin{aligned}
x &= x' \cos\psi + y' \cos\theta \sin\psi + z' \sin\theta \sin\psi \\
y &= - x' \sin\psi + y' \cos\theta \cos\psi + z' \sin\theta \cos\psi \\
z &= - y' \sin\theta + z' \cos\theta
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (30),$$

formules dans lesquelles θ représente toujours l'angle entre les plans $(x'y')$, (xy), et ψ l'angle de l'axe x' dans le plan (xy) avec l'axe des x.

Si dans les formules (28), on fait $\psi = 0$, hypothèse qui fait rentrer l'axe des x dans le plan (xy), et si, en même temps, on fait $z' = 0$, on retombe sur des formules que nous trouverons immédiatement dans le problème suivant.

Problème IV. *Une surface étant rapportée à trois axes rectangulaires* x, y, z, *trouver les formules propres à donner l'équation de la courbe d'intersection de cette surface par un plan donné de position par l'angle de sa trace dans le plan* (x, y) *avec l'axe des* x, *et par son inclinaison sur le plan* (x, y).

Nous prendrons pour axe des x' la trace du plan de la section dans le plan (x, y), et celui des y' contenu dans le

plan coupant, sera perpendiculaire à l'axe des x' : comme nous ne considérons que les points de la section, nous ferons $z'=0$. Si l'on désigne par φ l'angle (x', x), et par θ l'angle entre les plans $(x'\ y')$ et $(x\ y)$, les formules (16) deviendront d'abord

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi + y' \cos(y', x), \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos(y', y), \\ z &= y' \sin\theta, \end{aligned}$$

en observant que $\cos(x', z') = 0$, $(x', y) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $(y', z) = \frac{\pi}{2} - \theta$. Alors la troisième des équations (18) devient

$$0 = \cos\varphi \cos(y', x) + \sin\varphi \cos(y', y);$$

à cause de $\cos(x', z') = 0$, et la seconde des équations (17) se réduit à

$$\cos^2(y', x) + \cos^2(y', y) = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta:$$

on tire de là

$$\begin{aligned} \cos(y', x) &= \sin\varphi \cos\theta, \\ \cos(y', y) &= -\cos\varphi \cos\theta; \end{aligned}$$

conséquemment les formules ci-dessus deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta \\ y &= x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta \\ z &= y' \sin\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31).$$

Problème V. *Énoncer les coordonnées rectangulaires de tout point de l'espace, au moyen du rayon vecteur de ce point, de l'angle entre ce rayon vecteur et sa projection horizontale, et de l'angle entre cette projection horizontale et l'axe des abscisses.*

Lorsqu'une droite R passe par l'origine des coordonnées, et que x, y, z sont les coordonnées d'un de ses points, on a

$$x = R\cos(R, x), \quad y = R\cos(R, y), \quad z = R\cos(R, z),$$

or de ces trois angles, deux seulement sont indéterminés, à cause de la relation connue,

$$\cos^2(R, x) + \cos^2(R, y) + \cos^2(R, z) = 1.$$

La droite R se nomme le *rayon vecteur du point*, et l'origine A est le pôle d'où partent les rayons vecteurs des différens points de l'espace.

Lorsqu'on projette le rayon vecteur sur l'un des plans coordonnés, sur le plan (xy), par exemple, la position de ce rayon est donnée par l'angle θ qu'il fait avec sa projection horizontale, et par l'angle φ de cette projection avec l'axe des x. Ainsi R étant la longueur de ce rayon vecteur, et r celle de sa projection, on a

$$r = R \cos \theta;$$

si de l'extrémité de r, on abaisse des perpendiculaires sur les trois axes, les points où elles rencontrent ces axes, seront les mêmes que ceux où aboutissent les perpendiculaires menées de R sur les mêmes axes : on aura donc

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = R \sin \theta;$$

donc

$$x = R \cos\theta \cos\varphi, \quad y = R \cos\theta \sin\varphi, \quad z = R \sin\theta.$$

On tire de là

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\theta \cos\varphi}{\sin\theta}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos\theta \sin\varphi}{\sin\theta}.$$

Remarque. Les formules (16) servent à énoncer la distance $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ de l'origine à un point x, y, z, en coordonnées obliques du même point : à cet effet, remplaçant x, y, z par leurs valeurs (16), et réduisant d'après (17) et (18), on trouve

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos(x', y') + 2x'z' \cos(x', z') + 2y'z' \cos(y', z') \ldots (32).$$

CHAPITRE XIX.

Discussion des surfaces représentées par l'équation la plus générale du second degré entre trois variables.

194. On a vu dans ce qui précède, que les équations du premier degré entre trois variables, représentent des surfaces planes ou des plans, comme les équations du premier degré entre deux variables, représentent des lignes droites : en passant des lignes droites aux lignes courbes du premier ordre, ou aux lignes du second degré, l'équation prend trois termes de plus, savoir, les termes des carrés et du rectangle des variables : on passera donc à des surfaces courbes qui seront dites du premier ordre, ou du second degré, en ajoutant à l'équation du plan, les termes des carrés et des rectangles des variables. Ainsi nous aurons cette équation la plus générale du second degré entre trois variables,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz=L\ldots(1),$$

ou en divisant par L,

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz=1\ldots\ldots(2),$$

les axes des x, y et z étant rectangulaires entr'eux.

195. Puisque deux de ces variables peuvent être prises à volonté, on pourra résoudre l'équation par rapport à la troisième qui sera, par exemple, z, ensorte que, pour un système de valeurs de x et de y, on conclura deux valeurs de z, et par conséquent deux points de la surface, si cependant les deux valeurs de z sont réelles.

La résolution de l'équation (2) par rapport à z, donne

$$z = -\frac{ey+fx+i}{2c} \pm \sqrt{[\qquad\qquad]},$$

par rapport à y, donne

$$y = -\frac{dx+ez+h}{2b} \pm \sqrt{[\qquad\qquad]},$$

par rapport à x, donne

$$x = -\frac{dy+fz+g}{2a} \pm \sqrt{[\qquad\qquad]}:$$

or les parties rationnelles de ces valeurs, étant représentées par Z, Y, X, on a ces trois équations

$$Z = -\frac{ey+fx+i}{2c},$$
$$Y = -\frac{dx+ez+h}{2b},$$
$$X = -\frac{dy+fz+g}{2a},$$

qui sont à trois plans dont chacun divise également les cordes comprises dans la surface, respectivement parallèles aux axes des z, y, x. Ces plans symétriques se coupent en un point qu'on nomme *centre* de la surface, et dont on trouve les coordonnées, en notant z et Z par γ, y et Y par β, x et X par α, et évaluant γ, β, α au moyen de ces trois équations

$$2c\gamma + e\beta + f\alpha + i = 0,$$
$$2b\beta + d\alpha + e\gamma + h = 0,$$
$$2a\alpha + d\beta + f\gamma + g = 0.$$

Lorsque ces valeurs de α, β, γ seront finies, la surface admettra un centre; dans le cas contraire, ce point ne pourra exister.

196. Nous allons prouver qu'en passant d'un système à un autre système d'axes rectangulaires, et en déplaçant l'origine, on peut réduire l'équation (2) à cette forme très-simple

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1;$$

en effet, on introduit ainsi six indéterminées, savoir, les trois angles ψ, θ, φ, et les trois coordonnées de la nouvelle origine rapportée à l'ancienne, au moyen desquelles on peut faire disparaître six des dix termes de l'équation (2).

Si dans l'équation (2) on substitue d'abord pour x, y, z les formules (30), trouvées (chap. XVIII), savoir :

$$\begin{aligned}
x &= x' \cos\psi + y' \cos\theta \sin\psi + z' \sin\theta \sin\psi,\\
y &= -x' \sin\psi + y' \cos\theta \cos\psi + z' \sin\theta \cos\psi,\\
z &= -y' \sin\theta + z' \cos\theta,
\end{aligned}$$

on obtiendra une transformée toujours du second degré en x', y', z', dans laquelle les coefficiens des variables renfermeront les angles ψ et θ avec a, b, c.... : les facteurs des rectangles $x'z'$, $y'z'$, égalés à zéro, seront

$$\begin{aligned}
&2(a-b)\sin\theta \sin\psi \cos\psi + \cos\theta\,(f\cos\psi - e\sin\psi)\\
&\qquad\qquad - d\sin\theta\,(\sin^2\psi - \cos^2\psi) = 0 \ldots (3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\sin\theta\cos\theta\,(a\sin^2\psi + b\cos^2\psi + d\sin\psi\cos\psi - c)\\
&\qquad\qquad - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,(f\sin\psi + e\cos\psi) = 0 \ldots\ldots (4),
\end{aligned}$$

et il s'agit de prouver la réalité des angles ψ et θ. A cet effet, qu'on divise (3) par $\cos\theta$, et (4) par $\sin\theta\cos\theta$, et on aura

$$\begin{aligned}
&2\,(a-b)\sin\psi\cos\psi\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - d\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,(\sin^2\psi - \cos^2\psi)\\
&\qquad\qquad + f\cos\psi - e\sin\psi = 0 \ldots\ldots (5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\,(a\sin^2\psi + b\cos^2\psi + d\sin\psi\cos\psi - c)\\
&\qquad - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)(f\sin\psi + e\cos\psi) = 0 \ldots (6).
\end{aligned}$$

L'équation (5) donne

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tang}\theta=\frac{e\sin\psi-f\cos\psi}{2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d(\sin^2\psi-\cos^2\psi)};$$

substituant cette valeur de tang θ dans (6), on trouve

$$\frac{2(a\sin^2\psi+b\cos^2\psi+d\sin\psi\cos\psi-c)}{f\sin\psi+e\cos\psi}$$
$$=\frac{e\sin\psi-f\cos\psi}{2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d\sin^2\psi-\cos^2\psi)}$$
$$-\frac{2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d(\sin^2\psi-\cos^2\psi)}{e\sin\psi-f\cos\psi};$$

c'est-à-dire,

$$(f\sin\psi+e\cos\psi)\left\{\begin{array}{l}(e\sin\psi-f\cos\psi)^2\\-[2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d(\sin^2\psi-\cos^2\psi)]^2\end{array}\right\}$$
$$=2(e\sin\psi-f\cos\psi)[2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d(\sin^2\psi-\cos^2\psi)]$$
$$[a\sin^2\psi+b\cos^2\psi+d\sin\psi\cos\psi-c],$$

ou

$$(f\sin\psi+e\cos\psi)(e\sin\psi-f\cos\psi)^2$$
$$-[2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d(\sin^2\psi-\cos^2\psi)]$$
$$\left[\begin{array}{l}2(a-b)\sin\psi\cos\psi-d(\sin^2\psi-\cos^2\psi)(f\sin\psi+e\cos\psi)\\+2(e\sin\psi-f\cos\psi)(a\sin^2\psi+b\cos^2\psi+d\sin\psi\cos\psi-c)\end{array}\right]=0:$$

divisant cette équation par $\cos^3\psi$, on trouve

$$0=\left(\frac{f\sin\psi}{\cos\psi}+e\right)\left(e\frac{\sin\psi}{\cos\psi}-f\right)^2$$
$$-\cos^2\psi\left[2(a-b)\frac{\sin\psi}{\cos\psi}-d\left(\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}-1\right)\right]$$
$$\left[2(a-b)\frac{\sin\psi}{\cos\psi}-d\left(\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}-1\right)\right]\left(f\frac{\sin\psi}{\cos\psi}+e\right)$$
$$+2\left(e\frac{\sin\psi}{\cos\psi}-f\right)\left(a\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}+b+d\frac{\sin\psi}{\cos\psi}-\frac{c}{\cos^2\psi}\right)$$

Faisant

$$\frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \text{tang}\,\psi = u, \quad \text{d'où} \quad \cos^2\psi = \frac{1}{1+u^2},$$

cette dernière équation devient, après les réductions,

$$(fu+e)(eu-f)^2 - [2u(a-b) - du^2 + d]$$
$$[de + 2cf - 2bf + u(2ae - 2ce - df)] = 0 \ldots\ldots\ldots (7):$$

comme elle est du troisième degré, c'est-à-dire, d'un degré impair, elle fournira au moins une valeur réelle de u, ou de tang ψ (Alg., 1re sect., chap. 28), et l'angle ψ étant déterminé, l'équation (3) qui n'est que du premier degré par rapport à tang θ, donnera aussi une valeur réelle de cette tangente. Ainsi, par cette première transformation, l'équation (2) est réduite à la forme

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'x'y' + g'x' + h'y' + i'z' = 1 \ldots\ldots (8).$$

Il sera facile de faire disparaître le rectangle $x'y'$, et pour cela, il suffira de changer la direction des axes $x'y'$ dans leur plan, ce qui se fera au moyen des formules connues qui font passer dans un plan d'un système à un autre système d'axes rectangulaires; ensorte qu'on aura pour transformée

$$a''x''^2 + b''y''^2 + c''z''^2 + g''x'' + h''y'' + i''z'' = 1 \ldots (9);$$

enfin en changeant l'origine des coordonnées par ces formules

$$x = \alpha + x''', \quad y = \beta + y''', \quad z = \gamma + z''',$$

(chap. XVIII, probl. I), α, β, γ étant les coordonnées de la nouvelle origine rapportée à l'ancienne, on obtient cette dernière réduite

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0 \ldots\ldots (10):$$

en supprimant les accens des variables. Les axes des x, y et z sont nommés *axes principaux* de la surface, et l'origine est *le centre* de la surface.

197. On trouve dans le troisième numéro de *la Correspondance sur l'École Polytechnique*, un Mémoire très-intéressant de M. le professeur *Bourdon*, sur cette question : *Détermination des axes principaux dans les surfaces du second degré, et en particulier, dans celles de ces surfaces qui sont de révolution :* nous croyons devoir le faire connaître ici en son entier.

On a vu [chap. XVIII, form. (16)] que x, y, z étant les trois coordonnées rectangles d'un point quelconque, et x', y', z' trois autres coordonnées aussi rectangles du même point, ayant même origine que les premières, on avait ces formules

$$\begin{aligned} x &= mx' + m'y' + m''z', \\ y &= nx' + n'y' + n''z', \\ z &= px' + p'y' + p''z', \end{aligned}$$

m, n, p, m', n', p', m'', n'', p'', tenant lieu de $\cos(x', x)$, $\cos(x', y)$, $\cos(x', z)$, $\cos(y', x)$, $\cos(y', y)$, $\cos(y', z)$, $\cos(z', x)$, $\cos(z', y)$, $\cos(z', z)$; et, en même temps, les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1 \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1 \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(11),$$

$$\left.\begin{aligned} mm' + nn' + pp' &= 0 \\ mm'' + nn'' + pp'' &= 0 \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(12);$$

qui ne sont que les formules (17) et (18) [chap. XVIII], sous les désignations ci-dessus, et sous les hypothèses

$$\cos(y', z') = 0, \quad \cos(z', x') = 0, \quad \cos(y', x') = 0,$$

pour dire que les nouveaux axes sont rectangulaires.

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans l'équation (1), et qu'on forme les coefficiens des rectangles $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$

pour les égaler à zéro, on aur[...] [...]e t, et qu'on la [...] disparaîtra, [...] troisième [...]it que [...]e :

$$2Cp'p''+2Bn'n''+2Am'm''+E([\ldots]$$
$$+F([\ldots]$$
$$+D(n[\ldots]$$
$$2Cpp''+2Bnn''+2Amm''+E(n[\ldots]$$
$$+F(m[\ldots]$$
$$+D(mn[\ldots]$$
$$2Cpp'+2Bnn'+2Amm'+E(np[\ldots]$$
$$+F(mp[\ldots]$$
$$+D(mn'+nm')=0,$$

et pour abréger,

$$N=0, \quad N'=0, \quad N''=0.$$

Il s'agit de déterminer m, n, p, m', etc. Si l'on multiplie la seconde des équations (13) par m', et la troisième par m'', qu'ensuite on les retranche l'une de l'autre, on aura celle-ci

$$(2Cp+En+Fm)(m'p''-p'm'')$$
$$+(2Bn+Ep+Dm)(m'n''-n'm'')=0\ldots.(14):$$

multipliant de nouveau la seconde équation (13) par n', et la troisième par n'', puis retranchant le second produit du premier, il vient

$$(2Cp+En+Fm)(p'n''-n'p'')$$
$$+(2Am+Fp+Dn)(m'n''-n'm'')=0\ldots..(15).$$

Or, si l'on multiplie les deux premières équations du groupe (12), d'abord par m'' et m', puis par n'' et n', et qu'on retranche le second produit du premier, on trouvera

$$n(m'n''-n'm'')+p(m'p''-p'm'')=0,$$
$$m(m'n''-n'm'')+p(p'n''-n'p'')=0,$$

197. On trou[illegible]
dance sur l'[illegible] $\frac{\;m''}{\;-n'm''} = -\frac{n}{p}$, $\frac{p'n''-n'p''}{m'n''-n'm''} = -\frac{m}{p}$.
de M. le p[illegible]
des a[illegible]uant ces valeurs dans les équations (14) et (15), et pa[illegible]isant, il vient

$$2(C-B)np + E(n^2-p^2) + Fmn - Dmp = 0 \ldots\ldots (16),$$
$$2(C-A)mp + Emn + F(m^2-p^2) - Dnp = 0 \ldots\ldots (17):$$

si du produit de la secónde de ces équations par n, on retranche celui de la première par m, on aura celle-ci

$$2(B-A)mn + Emp - Fnp + D(m^2-n^2) = 0 \ldots\ldots (18),$$

que l'on pourra substituer à l'une d'elles.

Deux quelconques des équations (16), (17), (18), combinées avec la première des équations (11), savoir,

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1 \ldots\ldots (19),$$

donneront les valeurs de m, n, p.

A cet effet, posons

$$\frac{m}{p} = t, \quad \frac{n}{p} = u, \quad \text{d'où} \quad m = pt, \quad n = pu;$$

l'équation (19) donnera

$$p = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad m = \frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}},$$
$$n = \frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20),$$

et les équations (16), (17), (18) se changeront dans celles-ci

$$Eu^2 + Fut + 2(C-B)u - Dt - E = 0 \ldots\ldots (21),$$
$$Ft^2 + Eut + 2(C-A)t - Du - F = 0 \ldots\ldots (22),$$
$$Dt^2 - Du^2 + 2(B-A)ut + Et - Fu = 0 \ldots\ldots (23),$$

dont la dernière est comprise dans les deux autres.

Si l'on prend dans la première la valeur de t, et qu'on la substitue dans la seconde, le terme affecté de u^4 disparaîtra, et il restera, pour déterminer u, une équation du troisième degré, ayant au moins une racine réelle; d'où il suit que chacune des quantités t, m, n, p aura aussi une valeur réelle : nous formerons bientôt cette équation en u.

Observons maintenant que si l'existence simultanée des équations (14) et (15), et des deux premières équations du groupe (12), entraîne celle des deux équations (16) et (17), réciproquement l'existence simultanée des équations (16) et (17) et des deux premières équations du groupe (12), entraîne celle des équations (14) et (15), et par conséquent des deux dernières équations (13), savoir, $N'=0$, $N''=0$.

Il résulte de là que si on rapporte la surface à trois nouveaux axes rectangulaires, en prenant pour axe des x, la ligne qui répond aux valeurs réelles de m, n, p trouvées ci-dessus, comme ces valeurs vérifient deux quelconques des trois équations (16), (17) et (18), en même temps que les deux premières du groupe (12), elles vérifieront en même temps les deux dernières équations du groupe (13), savoir, $N'=0$, $N''=0$; c'est-à-dire que l'équation de la surface sera privée des rectangles en $x'z'$ et $x'y'$, et qu'ainsi, après la suppression des accens, elle prendra la forme

$$Mx^2+M'y^2+M''z^2+Nyz+Px+P'y+P''z+Q=0,$$

et nous avons vu plus haut qu'on pouvait passer de cette transformée à une autre, débarrassée du rectangle.

Les équations (11), (12) et (13) étant symétriques par rapport à m, n, p, m', n', etc., si on élimine soit m', n', p', soit m'', n'', p'' par une méthode analogue à la précédente, on parviendra à trois équations qui seront (16), (17) et (18), en y changeant m, n, p en m', n', p', ou m'', n'', p''.

Il résulte de là que l'équation du troisième degré en u, ne doit pas plutôt donner la racine d'où dépendent les quantités m, n, p, que les deux racines d'où dépendent les quan-

tités m', n', p', m'', n'', p'' ; donc elle doit les donner toutes trois. Et comme nous venons de démontrer l'existence de trois axes différens par rapport auxquels l'équation de la surface perd les termes des trois rectangles, il s'ensuit que les trois racines de l'équation en u doivent être réelles; 2°. que chacune d'elles substituée en même temps que la valeur correspondante de t dans les expressions (20), donnerait la première les valeurs de m, n, p qui répondent à l'axe des x, par exemple, la seconde, celles de m', n', p' qui répondent à l'axe des y, et enfin la troisième, celles de m'', n'', p'' qui fixent l'axe des z, et tels sont les trois axes principaux de la surface.

Pour former l'équation en u, soient

$$\left.\begin{array}{l} P = 2FD\,(C-B) + E\,(D^2-F^2) \\ Q = 2ED\,(A-C) + F\,(E^2-D^2) \\ R = 2FE\,(B-A) + D\,(F^2-E^2) \end{array}\right\}\ldots.(24),$$

ces quantités étant évidemment liées entr'elles par l'équation

$$PE + QF + RD = 0\ldots..(25),$$

si l'on opère sur les équations (21) et (22), comme on l'a dit plus haut, on parviendra, après un calcul un peu long, et quelques transformations, à l'équation

$$\begin{array}{c} REu^3 + [2R\,(C-B) + QE - PF]\,u^2 \\ + [PD + 2Q\,(C-B) - RE]\,u - QE = 0\ldots.(26). \end{array}$$

Soit, 1°. $R = 0$; l'une des valeurs de u devient infinie, et les deux autres sont données par l'équation

$$(QE - PF)\,u^2 + [PD + 2Q\,(C-B)]\,u - QE = 0;$$

et, en tenant compte de la relation (25) d'où l'on tire, dans l'hypothèse actuelle,

$$P = -\frac{QF}{E},$$

cette équation devient

$$u^2 + \frac{2E(C-B)-FD}{E^2+F^2}u - \frac{E^2}{E^2+F^2} = 0,$$

d'où on tirera les deux autres valeurs de u.

2°. Soit $Q = 0$: l'équation (26) donnera, 1°. $u = 0$; 2°.

$$REu^2 + [2R(C-B) - PF]u + PD - RE = 0,$$

ou, à cause de $P = -\frac{RD}{E}$,

$$u^2 + \frac{2E(C-B)+FD}{E^2}u - \frac{E^2+D^2}{E^2} = 0.$$

3°. Soit $P = 0$: il en résulte

$$\begin{aligned} REu^3 &+ [2R(C-B) + QE]u^2 \\ &+ [2Q(C-B) - RE]u - QE = 0, \end{aligned}$$

ou, à cause de $Q = -\frac{RD}{F}$,

$$\begin{aligned} EFu^3 &+ [2F(C-B) - ED]u^2 \\ &- [2D(C-B) + EF]u + ED = 0, \end{aligned}$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$Eu^2(Fu-D) + 2(C-B)u(Fu-D) - E(Fu-D) = 0,$$

d'où

$$Fu - D = 0, \quad u^2 + \frac{2(C-B)}{E}u - 1 = 0.$$

4°. Soient en même temps $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$: l'équation en u se réduit à $0 = 0$, et u reste entièrement indéterminé ; ensorte que le nombre des systèmes d'axes principaux, est infini ; mais on observera que, d'après la relation (25), les hypothèses $P = 0$, $Q = 0$ entraînent $R = 0$, lorsque D n'est pas nul.

Nous allons reconnaître que, sous ces conditions $P = 0$, $Q = 0$,

les deux équations (21) et (22) deviennent décomposables en deux facteurs du premier degré : à cet effet, nous rechercherons la condition sous laquelle l'équation (21), par exemple, est décomposable en de tels facteurs. On tire de cette équation,

$$u = -\frac{Ft + 2(C - B)}{2E}$$

$$\pm \frac{1}{2E}\sqrt{F^2t^2 + 4[F(C-B) + ED]t + 4[(C-B)^2 + E^2]} \ldots (27):$$

pour que celle-ci soit décomposable en deux facteurs rationnels, il faut que la quantité sous le radical soit un carré parfait, ce qui exige que l'on ait

$$2(C - B) = \frac{E(F^2 - D^2)}{FD},$$

d'où

$$2FD(C - B) + E(D^2 - F^2) = P = 0,$$

condition sous laquelle on vient de voir que l'équation u est décomposable en deux facteurs : substituant dans la formule (27) la valeur ci-dessus de $2(C - B)$, et faisant les réductions, on trouve

$$Fu - D = 0, \quad EDu + FDt + EF = 0.$$

Ainsi l'équation (27) peut se mettre sous la forme

$$(Fu - D)(EDu + FDt + EF) = 0 \ldots (28).$$

Le premier facteur donne

$$u = \frac{D}{F};$$

substituant dans l'équation (22), il vient

$$t^2 + \frac{ED + 2F(C - A)}{FD}t - \frac{F^2 + D^2}{F^2} = 0,$$

dont les deux racines sont essentiellement réelles et faciles à obtenir.

Le second facteur donne

$$u = -\frac{FDt + EF}{ED},$$

dont la substitution dans l'équation (22), donne

$$[2ED\,(A - C) + FE^2 - FD^2]\,t = 0\,;$$

d'où on tire $t = 0$, ce qui donne

$$u = -\frac{EF}{ED} = -\frac{F}{D},$$

et par conséquent,

$$m = 0, \quad n = -\frac{F}{\sqrt{F^2 + D^2}}, \quad p = \frac{D}{\sqrt{F^2 + D^2}}.$$

Si dans l'équation qui vient de donner la troisième valeur de t, on suppose nul le coefficient de t, c'est-à-dire

$$2ED\,(A - C) + F\,(E^2 - D^2) = 0,$$

ce qui revient à la seconde des équations (24) ou à $Q = 0$, la valeur de t reste indéterminée, ce qui annonce que le nombre des systèmes d'axes principaux, est infini. En effet, la condition précédente étant satisfaite, l'équation (22) est aussi décomposable en deux facteurs du premier degré, et peut être mise sous la forme

$$(Et - D)\,(EDu + FDt + EF) = 0 \ldots (29).$$

Si on compare cette équation (29) avec (28), on reconnaîtra qu'elles ont un facteur commun $EDu + FDt + EF$ qui égalé à zéro, donne une infinité de valeurs pour u et t.

Mais tous ces systèmes jouissent de la propriété remarquable d'avoir un axe commun. Pour le prouver, remarquons que les équations (28) et (29) sont satisfaites, 1°. par

$$Fu - D = 0, \quad Et - D = 0;$$

2°. par

$$EDu + FDt + EF = 0.$$

Le premier système donne

$$u=\frac{D}{F}, \quad t=\frac{D}{E};$$

donc en désignant par m, n, p les cosinus des angles que forme cet axe particulier avec les axes primitifs, on aura

$$p=\frac{EF}{\sqrt{E^2F^2+D^2E^2+F^2D^2}}, \quad n=\frac{ED}{\sqrt{\quad}}, \quad m=\frac{FD}{\sqrt{\quad}}.$$

Représentons maintenant par $\mu, \nu, \varpi, \mu', \nu', \varpi'$ les cosinus relatifs aux deux autres axes conjugués de celui-ci ; comme les trois axes sont rectangulaires, on aura ces deux relations

$$m\mu+n\nu+p\varpi=0, \quad m\mu'+n\nu'+p\varpi'=0;$$

et, en mettant pour m, n, p les valeurs ci-dessus,

$$FD\mu+ED\nu+EF\varpi=0, \quad FD\mu'+ED\nu'+EF\varpi'=0 \ldots (30);$$

et si, pour déterminer $\mu, \nu, \varpi, \mu', \nu', \varpi'$, on fait encore

$$\mu=\varpi t, \quad \nu=\varpi u; \quad \mu'=\varpi' t, \quad \nu'=\varpi' u,$$

les deux équations (30) se réduiront à

$$EDu+FDt+EF=0,$$

d'où on doit tirer les valeurs de u et t propres à donner tous les axes autres que celui déterminé par

$$u=\frac{D}{F}, \quad t=\frac{D}{E}.$$

Concluons de là que lorsque les deux premières conditions (24) ont lieu à la fois, le nombre des systèmes d'axes principaux, est infini, et qu'ils ont un axe commun.

La seconde partie du beau travail de M. *Bourdon*, a pour objet, 1°. la recherche des caractères auxquels on reconnaît qu'une surface du second degré, est de révolution; 2°. la détermination de l'axe de révolution.

1°. Proposons-nous de déterminer les relations qui doivent avoir lieu entre les coefficiens d'une équation du second degré à trois variables, pour que la surface qu'elle représente, soit une surface de révolution.

Soient

$$x-\alpha=a(z-\gamma),\quad y-\beta=b(z-\gamma),$$

les équations d'un axe de révolution passant par le point α, β, γ,

$$z+ax+by=c,$$

l'équation d'un plan perpendiculaire à cet axe (chap. XVII), et

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2,$$

l'équation d'une sphère ayant son centre au point α, β, γ: l'équation générale et caractéristique des surfaces de révolution, est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\mathrm{F}\,(ax+by+z)\ [*],$$

(*) Les surfaces de révolution ont un caractère indépendant de la nature de la courbe génératrice; c'est que si on les coupe par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de révolution, on a pour section la circonférence d'un cercle dont le centre est dans l'axe, et dont tous les points sont par conséquent à des distances égales d'un même point pris sur l'axe, circonférence qu'on peut regarder comme l'intersection d'une sphère ayant son centre en α, β, γ, par le plan perpendiculaire à l'axe; ensorte que la surface sera la suite des intersections des sphères concentriques dont le centre est α, β, γ, et le rayon variable, par une suite de plans perpendiculaires à l'axe de révolution. Cela posé, si le point que l'on considère sur la surface de révolution, se meut sur cette surface sans sortir du même plan perpendiculaire à l'axe, il ne sortira pas non plus de la même surface sphérique, et alors les quantités c et r seront constantes ensemble; mais si ce point, en se mouvant, sort du plan perpendiculaire à l'axe, il passera aussi sur la surface d'une autre sphère, et les quantités c et r auront varié. Les surfaces de révolution sont donc telles que c et r, c'est-à-dire, leurs valeurs $z+ax+by$, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$ sont constantes ensemble et variables ensemble: ainsi l'une d'elles est une fonction de l'autre, fonction dont la forme dépend de la nature de la courbe génératrice.

F étant un signe de fonction. Ainsi pour qu'une surface soit de révolution, il faut que son équation soit de cette forme, ou qu'elle puisse y être ramenée.

Il résulte de là que les équations des surfaces de révolution du second degré, sont toutes susceptibles d'être mises sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2 = \mathrm{K}(ax+by+z)^2+\mathrm{L} \ldots (31),$$

K et L étant des quantités constantes. Nous ne tenons pas compte de la première puissance de $ax+by+z$, parce que si elle se trouvait dans le second membre, on pourrait la faire passer dans le premier, qui conserverait la même forme.

Cela posé, reprenons l'équation générale

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2+\mathrm{D}xy+\mathrm{E}yz+\mathrm{F}xz \\ &\quad +\mathrm{G}x+\mathrm{H}y+\mathrm{I}z=\mathrm{L} \ldots\ldots\ldots (32), \end{aligned}$$

et recherchons les relations qui doivent exister entre ses coefficiens, pour qu'elle soit réductible à la forme (31).

En développant l'équation (31) et ordonnant, on trouve

$$\begin{aligned} &(\mathrm{K}-1)z^2+(\mathrm{K}b^2-1)y^2+(\mathrm{K}a^2-1)x^2 \\ &\quad +2\mathrm{K}byz+2\mathrm{K}axz+2\mathrm{K}abxy \\ &\quad +2\gamma z+26y+2\alpha x+\mathrm{L}-\alpha^2-6^2-\gamma^2=0 \ldots (33). \end{aligned}$$

Observons maintenant que des six premiers coefficiens de l'équation générale, cinq seulement sont nécessaires; il faut donc diviser les équations (32) et (33) par le coefficient de z^2, avant de les comparer : ces préparations faites, on obtiendra les relations

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{K}b^2-1}{\mathrm{K}-1},\quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{K}a^2-1}{\mathrm{K}-1},\quad \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}}=\frac{2\mathrm{K}b}{\mathrm{K}-1},$$

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}}=\frac{2\mathrm{K}a}{\mathrm{K}-1},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}=\frac{2\mathrm{K}ab}{\mathrm{K}-1},\quad \text{etc. :}$$

ces équations sont les seules qui puissent donner des condi-

tions. On tire des trois dernières,

$$\frac{4K^2ab}{2Kab(K-1)} = \frac{2K}{K-1} = \frac{EF}{CD},$$

d'où

$$K = \frac{EF}{EF-2CD}, \quad K-1 = \frac{2CD}{EF-2CD},$$

$$b = \frac{E(K-1)}{2CK} = \frac{D}{F}, \quad a = \frac{D}{E}.$$

Substituant ces valeurs dans les deux premières, il vient, 1°.

$$\frac{B}{C} = \frac{KD^2-F^2}{(K-1)F^2} = \frac{\frac{EFD^2}{EF-2CD}-F^2}{\frac{2CDF^2}{EF-2CD}}$$

$$= \frac{E(D^2-F^2)+2CFD}{2CFD} \ldots\ldots (34);$$

d'où résulte la première équation de condition

$$2FD(C-B)+E(D^2-F^2)=0 \ldots\ldots (35),$$

qui n'est autre chose que $P=0$; et, 2°.

$$\frac{A}{C} = \frac{KD^2-E^2}{(K-1)E^2} = \frac{\frac{EFD^2}{EF-2CD}-E^2}{\frac{2CDE^2}{EF-2CD}}$$

$$= \frac{F(D^2-E^2)+2CED}{2CED} \ldots\ldots (36),$$

d'où résulte la seconde équation de condition

$$2ED(C-A)+F(D^2-E^2)=0 \ldots\ldots (37),$$

qui répète $Q=0$.

Donc pour qu'une équation du second degré entre trois variables, appartienne à une surface de révolution, il faut

que les conditions $P=0$, $Q=0$, soient satisfaites. Réciproquement, toutes les fois que ces conditions auront lieu, la surface sera de révolution, et on pourra même déterminer la position de l'axe de révolution.

En effet, des conditions (35) et (37), on tirera

$$\frac{B}{C}=\frac{E(D^2-F^2)+2CFD}{2CFD}=\frac{Kb^2-1}{K-1},$$
$$\frac{A}{C}=\frac{F(D^2-E^2)+2CED}{2CED}=\frac{Ka^2-1}{K-1},$$

en posant

$$\frac{EF}{EF-2CD}=K,\quad \frac{D}{F}=b,\quad \frac{D}{E}=a;$$

et de celles-ci on déduit facilement

$$\frac{E}{C}=\frac{2Kb}{K-1},\quad \frac{F}{C}=\frac{2Ka}{K-1},\quad \frac{D}{C}=\frac{2Kab}{K-1}:$$

l'équation (32) deviendra donc

$$\begin{aligned}z^2&+\frac{Kb^2-1}{K-1}y^2+\frac{Ka^2-1}{K-1}x^2\\&+\frac{2Kb}{K-1}yz+\frac{2Ka}{K-1}xz+\frac{2Kab}{K-1}xy\\&+\frac{I}{C}z+\frac{H}{C}y+\frac{G}{C}x=0,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&(K-1)z^2+(Kb^2-1)y^2+(Ka^2-1)x^2+2Kbyz+2Kaxz\\&+2Kabxy+\frac{(K-1)I}{C}z+\frac{H(K-1)}{C}y+\frac{G(K-1)}{C}x=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}&\left[z-\frac{I(K-1)}{2C}\right]^2+\left[y-\frac{H(K-1)}{2C}\right]^2+\left[x-\frac{G(K-1)}{2C}\right]^2\\&-K(z+ax+by)^2+\frac{(K-1)^2(G^2+H^2+I^2)}{4C^2}-4\frac{(K-1)}{C}=0,\end{aligned}$$

équation d'une surface de révolution dont l'axe est déterminé par les équations

$$x - \frac{G(K-1)}{2C} = a\left(z - \frac{I(K-1)}{2C}\right),$$
$$y - \frac{H(K-1)}{2C} = b\left(z - \frac{I(K-1)}{2C}\right),$$

K, b et a étant donnés par

$$K = \frac{EF}{EF-2CD}, \quad b = \frac{D}{F}, \quad a = \frac{D}{E}.$$

M. *Bourdon* démontre enfin, 1°. que si l'équation générale est privée d'un seul rectangle, la surface ne peut être de révolution; 2°. que si cette équation est privée de deux quelconques des trois rectangles, par exemple, de yz et de xz, la seule condition

$$D^2 - 4(C-B)(C-A) = 0$$

est nécessaire pour que la surface soit de révolution; 3°. que si les trois rectangles manquent, la surface ne peut être de révolution qu'autant que deux des trois coefficiens C, B, A sont égaux et de même signe : et lorsque cette condition est satisfaite, l'équation appartient à une surface de révolution dont l'axe est parallèle à l'un des trois axes rectangulaires, celui suivant lequel se compte la variable dont le carré est affecté d'un coefficient différent des deux autres.

198. M. *Binet* (J.-P.-M.) a observé que lorsque les surfaces du second degré avaient un centre, le calcul pour trouver la réduite de l'équation générale, pouvait être simplifié par la considération suivante.

Ayant un système de droites parallèles entr'elles, qui servent de cordes à la surface du second degré, il existe un plan perpendiculaire à ces cordes, qui les divise toutes en parties égales, lequel plan est un des plans rectangulaires de la sur-

face ; proposition analogue à celle qui a été démontrée (54), sur les courbes planes.

Reprenons l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz=1\ldots.(1),$$

et soient

$$x=\alpha z+\beta, \quad y=\alpha' z+\beta' \ldots.(2);$$

les équations d'une droite qui coupe la surface du second degré en deux points : on obtiendra les coordonnées de ces points, en combinant ces équations ; et si l'on fait pour abréger,

$$\begin{gathered}a\alpha^2+b\alpha'^2+d\alpha\alpha'+e\alpha'+f\alpha+c=m,\\ 2a\alpha\beta+2b\alpha'\beta'+d(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+e\beta'+f\beta+g\alpha+h\alpha'+i=n,\\ a\beta^2+b\beta'^2+d\beta\beta'+g\beta+h\beta'-1=p,\end{gathered}$$

l'ordonnée Z du point d'intersection, sera donnée par l'équation

$$mZ^2+nZ+p=0,$$

et les deux valeurs de Z sont

$$-\frac{n}{2m}+\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}-p}, \quad -\frac{n}{2m}-\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}-p};$$

donc l'ordonnée Z' du milieu de la droite qui joint les deux points d'intersection, est $-\frac{n}{2m}$. Nommant X', Y' les deux autres coordonnées du même point, on aura par les équations (2),

$$X'=\alpha Z'+\beta, \quad Y'=\alpha' Z'+\beta', \quad Z'=-\frac{n}{2m}\ldots.(3).$$

Regardant X', Y', Z' comme des coordonnées variables dont la valeur dépend des quantités β, β', si entre ces trois équations on élimine β, β', l'équation résultante en X', Y', Z' qu'on peut désigner par x, y, z, appartiendra à la surface qui passe par les milieux de toutes les cordes parallèles à la

droite des équations (2). Les équations (3) donnent

$$\beta = x - \alpha z, \quad \beta' = y - \alpha' z,$$

$$-2mz = \beta(2a\alpha + d\alpha' + f) + \beta'(2b\alpha' + d\alpha + e) + g\alpha + h\alpha' + i:$$

substituant dans cette dernière pour β, β', m leurs valeurs, on trouve, après les réductions,

$$x(2a\alpha + d\alpha' + f) + y(2b\alpha' + d\alpha + e) + z(e\alpha' + f\alpha + 2c) + g\alpha + h\alpha' + i = 0 \ldots\ldots (4),$$

équation d'un plan qui passe par le milieu des cordes parallèles à celle des équations (2).

Pour que ce plan soit perpendiculaire aux cordes, il faut qu'il soit parallèle au plan passant par l'origine, qui a pour équation

$$z + \alpha x + \alpha' y = 0 \ldots\ldots (5)$$

(chap. XVII, probl. V) : comparant (5) avec (4), on a

$$\alpha = \frac{2a\alpha + d\alpha' + f}{e\alpha' + f\alpha + 2c}, \quad \alpha' = \frac{2b\alpha' + d\alpha + e}{e\alpha' + f\alpha + 2c} \ldots\ldots (6),$$

équations linéaires l'une par rapport à α', l'autre par rapport à α : on en tire

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{f + 2\alpha(a - c) - f\alpha^2}{e\alpha - d}, \\ e\alpha'^2 + (f\alpha + 2c - 2b)\,\alpha' - (d\alpha + c) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (7):$$

mettant dans cette dernière pour α' sa valeur déduite de la première, on aura une équation du troisième degré en α, qui, comme l'on sait, admettra, au moins, une racine réelle α à laquelle correspond une valeur réelle de α' donnée par la première des équations (7). Substituant ces valeurs dans l'équation (4), on obtiendra l'équation du plan diamétral perpendiculaire à toutes les cordes parallèles à la droite des équations (2). La surface du second degré étant rapportée à ce plan diamétral comme l'un des plans coordonnés, son équation sera de la forme

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'x'y' + g'x' + h'y' - 1 = 0,$$

puisque, pour chaque couple de valeurs de x et y, on doit avoir deux valeurs de z, égales et de signes contraires. On fera disparaître le rectangle et les premières puissances des variables, comme on l'a dit (196), ensorte que la proposée sera réduite à la forme (10) trouvée (196).

199. Nous allons rechercher les systèmes d'axes obliques qui peuvent faire prendre à l'équation générale la forme particulière

$$\alpha x^2 + \zeta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \varepsilon = 0,$$

de laquelle il est aisé de passer à celles-ci,

$$\alpha x^2 + \zeta y^2 + \gamma z^2 = \lambda, \quad \text{ou} \quad \alpha x^2 + \zeta y^2 + \delta z = 0.$$

Soit la droite

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu:$$

on déterminera les points de rencontre de cette droite et de la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + iz = 1,$$

par l'équation

$$\begin{aligned} &z^2(am^2 + bn^2 + c + dmn + en + fm) \\ &+ z(2am\mu + 2bn\nu + dn\mu + dm\nu + e\nu + f\mu + gm + hn + i) \\ &+ a\mu^2 + b\nu^2 + d\mu\nu + g\mu + h\nu - 1 = 0: \end{aligned}$$

la demi-somme des ordonnées des deux extrémités de la corde, est l'ordonnée z' du milieu de leur distance; les coordonnées de ce point seront donc données par les équations

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu,$$

$$z' = -\frac{(2am + dn + f)\mu + (2bn + dm + e)\nu + gm + hn + i}{2(am^2 + bn^2 + c + dmn + en + fm)}.$$

On obtiendra l'équation du plan diamétral qui divise également les cordes parallèles à celle qu'on a choisie, plan que nous dirons conjugué à ce système de cordes, par l'élimination

des quantités μ, ν entre ces trois équations ; et l'équation résultante sera de la forme

$$Sx' + Ty' + Uz' + V = 0,$$

S, T, U et V étant des fonctions de m, n et des coefficiens de la proposée. Ainsi, étant donné un plan de position, on pourra toujours assigner un plan conjugué parallèle, puisqu'on pourra toujours déterminer les quantités m et n d'après la condition que les coefficiens S, T, U soient égaux à ceux du plan donné.

Si l'on rapporte la surface à de nouveaux axes coordonnés dont l'un, celui des x, par exemple, soit parallèle au système des cordes, et les deux autres soient dans le plan diamétral conjugué à ce système, il est évident que l'équation de la surface prendra nécessairement la forme

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + e'yz + h'y + i'z + k' = 0,$$

puisque, pour chaque couple de valeurs de y et z, on doit avoir deux valeurs de x égales et de signes contraires.

L'intersection de la surface par le plan des (yz), qu'on obtient en faisant $x = 0$ dans l'équation précédente, a pour équation

$$b'y^2 + c'z^2 + e'yz + h'y + i'z + k' = 0;$$

or on a prouvé qu'il existe une infinité de systèmes d'axes coordonnés par rapport auxquels l'équation précédente peut prendre la forme plus simple

$$\beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \varepsilon = 0;$$

donc l'équation de la surface rapportée toujours au même axe des x, et à des axes des y et z, choisis d'après la condition précédente, prendra la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \varepsilon = 0,$$

qui est celle que nous avons annoncée.

On peut encore la simplifier, en déplaçant le plan des (xy)

parallèlement à lui-même; et, pour cela, il ne faut que substituer pour z, dans cette équation, $z+\omega$, ce qui donnera

$$\alpha x^2+\text{б}y^2+\gamma z^2+(2\gamma\omega+\delta)z+\gamma\omega^2+\delta\omega+\varepsilon=0:$$

lorsque γ n'est pas nul, on peut prendre $\omega=-\frac{\delta}{2\gamma}$, et l'équation de la surface devient

$$\alpha x^2+\text{б}y^2+\gamma z^2=\lambda.$$

Si γ est nul, comme ω deviendrait infini, on en disposera de manière à faire disparaître le terme $\delta\omega+\varepsilon$, et l'équation deviendra

$$\alpha x^2+\text{б}y^2+\delta z=0.$$

On observera que ω étant infini, la courbe n'a pas de centre (196).

Il est clair qu'il existe aussi trois axes perpendiculaires entr'eux, par rapport auxquels l'équation de la surface peut prendre la forme

$$\alpha' x^2+\text{б}' y^2+\gamma' z^2+\delta' z+\varepsilon'=0,$$

qu'on peut ensuite réduire à l'une des deux formes précédentes.

200. Théorème I. *Dans les surfaces qui ont un centre, 1°. la somme des carrés des demi-diamètres conjugués, est égale à la somme des carrés des demi-axes principaux; 2°. le parallélepipède des demi-diamètres conjugués, est égal à celui des demi-axes.*

Quoique ces deux questions aient été résolues par l'algèbre, l'une dans *la Correspondance sur l'École Polytechnique*, et l'autre dans le treizième cahier du journal de la même école, cependant nous préférons la solution suivante par le calcul différentiel, extraite des *Annales Mathématiques*, parce qu'elle résout complètement l'énoncé.

Nous reprendrons l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'xy=D\dots\dots(1),$$

qui représente une surface du second degré, rapportée à

son centre, et à trois axes dont les directions soient telles qu'on ait

$$\text{ang.}(y, z) = \gamma, \quad \text{ang.}(z, x) = \beta, \quad \text{ang.}(x, y) = \alpha.$$

En désignant par r la distance d'un point quelconque de cette surface à son centre, on aura [chap. XVIII, form. (32)]

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\gamma + 2xz\cos\beta + 2xy\cos\alpha \ldots (2).$$

La propriété qui caractérise les six sommets de la surface courbe, consiste en ce que, pour chacun d'eux, r doit être un *maximum* ou un *minimum*.

Supposons donc que x, y, z soient les coordonnées rectangles de l'un de ces sommets, auquel cas r sera la moitié de l'un des diamètres principaux. Si l'on pose

$$x = pz, \qquad y = qz,$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(ap^2 + bq^2 + c + 2a'q + 2b'p + 2c'pq)z^2 = D^2,$$
$$(p^2 + q^2 + 1 + 2q\cos\gamma + 2p\cos\beta + 2pq\cos\alpha)z^2 = r^2,$$

d'où on conclura, par l'élimination de z^2,

$$(ar^2 - D)p^2 + (Br^2 - D)q^2 + 2(c'r^2 - D\cos\alpha)pq$$
$$+ 2(b'r^2 - D\cos\beta)p + 2(a'r^2 - D\cos\gamma)q + (cr^2 - D) = 0 \ldots (3);$$

différentiant cette équation par rapport à p et à q seulement, puisque, par l'hypothèse, la différentielle de r doit être nulle (Calc. diff.), et égalant séparément à zéro les coefficiens de dp et dq, parce que ces différentielles sont indépendantes, on aura ces deux équations

$$(ar^2 - D)p + (c'r^2 - D\cos\alpha)q + (b'r^2 - D\cos\beta) = 0,$$
$$(Br^2 - D)q + (c'r^2 - D\cos\alpha)p + (a'r^2 - D\cos\gamma) = 0.$$

Si de ces équations on tire p et q pour en substituer les valeurs

dans l'équation (3), on trouvera pour résultat,

$$\begin{aligned}&(abc+2a'b'c'-aa'^2-bb'^2-cc'^2)\,r^6\\ -\,&D\left\{\begin{array}{l}(bc-a'^2)+2(b'c'-aa')\cos\gamma\\+(ca-b'^2)+2(c'a'-bb')\cos\beta\\+(ab-c'^2)+2(a'b'-cc')\cos\alpha\end{array}\right\}r^4\\ +\,&D^2\left\{\begin{array}{l}a\sin^2\gamma-2a'(\cos\gamma-\cos\beta\cos\alpha)\\+b\sin^2\beta-2b'(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)\\+c\sin^2\alpha-2c'(\cos\alpha-\cos\gamma\cos\beta)\end{array}\right\}r^2\\ -\,&D^3(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)=0\ldots(4).\end{aligned}$$

Les racines de cette équation qui, deux à deux, sont égales et de signes contraires, seront les distances du centre de la courbe à ses six sommets, ou, ce qui revient au même, ses six demi-diamètres principaux.

Supposons que les axes des coordonnées soient trois diamètres conjugués : on devra avoir $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$, ensorte que l'équation (1) deviendra, en supposant $D=1$,

$$ax^2+by^2+cz^2=1\,;$$

les carrés des diamètres conjugués qu'on obtient en faisant $y=0$ et $z=0$, $x=0$ et $z=0$, $x=0$ et $y=0$, seront donc respectivement

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{b},\quad \frac{1}{c},$$

et l'équation (4) deviendra

$$\begin{aligned}&abcr^6-(bc+ca+ab)\,r^4\\ +\,&(a\sin^2\gamma+b\sin^2\beta+c\sin^2\alpha)\,r^2\\ -\,&(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)=0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&r^6-\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\}r^4\\ &+\left\{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\sin^2\gamma+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\sin^2\beta+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\sin^2\alpha\right\}r^2\\ &-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\left\{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right\}=0;\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, d'après la composition connue des coefficiens en racines de l'équation, 1°. que la somme

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

des carrés des demi-diamètres conjugués, est égale à la somme des carrés des demi-axes principaux r^2, r'^2, r''^2; 2°. que

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\sin^2\gamma+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\sin^2\beta+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\sin^2\alpha$$
$$=r^2r'^2+r^2r''^2+r'^2r''^2;$$

propriété facile à interpréter; 3°. enfin que

$$+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\left\{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right\}$$
$$=r^2r'^2r''^2;$$

la racine du premier membre représente le volume du parallélepipède des diamètres conjugués (chap. XVII, probl. XI), et celle du second représente le volume du parallélepipède construit sur les axes rectangulaires.

201. L'équation réduite des surfaces qui ont un centre, est donc

$$Lx^2+My^2+Nz^2=1;$$

les axes étant rectangulaires; et les surfaces dépourvues de centre, sont représentées par

$$Px^2+Ry^2+Sz=0.$$

Nous allons discuter les premières.

DES SURFACES QUI ONT UN CENTRE.

202. Nous chercherons d'abord l'équation de la droite qui est le lieu des centres des sections déterminées dans la surface par une suite de plans parallèles.

Soit

$$z = Ax + By + D,$$

l'équation du plan sécant : si dans

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1,$$

on remplace z par sa valeur donnée par l'équation du plan, la résultante étant indépendante de z, c'est-à-dire, ne renfermant plus que les coordonnées x et y des points d'intersection, ne pourra plus représenter que la projection de la courbe d'intersection sur le plan des (xy) : cette projection a donc pour équation

$$(L + NA^2)\,x^2 + (M + NB^2)\,y^2 + 2ABNxy \\ + 2ADNx + 2BDNy + ND^2 - 1 = 0;$$

ses diamètres qui, comme on le sait, se coupent au centre, sont représentés par

$$x = -\frac{AN(By + D)}{L + NA^2} \ldots\ldots (1),$$

$$y = -\frac{BN(Ax + D)}{M + NB^2} \ldots\ldots (2):$$

si on élimine D entre ces deux équations, le résultat représentera la droite qui est le lieu des projections des centres des sections déterminées par une suite de plans sécans parallèles au précédent, en observant que le centre de la projection d'une courbe, n'est que la projection du centre de cette courbe : cette équation est

$$\frac{(L + NA^2)\,x + ABNy}{(M + NB^2)\,y + ABNx} = \frac{A}{B};$$

mettant dans l'équation du plan, pour D sa valeur tirée de (1) ou (2), on aura pour secondes projections de la ligne des centres

$$z = -\frac{L}{AN}\,x, \quad z = -\frac{M}{BN}\,x;$$

ces équations n'ayant pas de terme constant, appartiennen

à une droite qui passe par l'origine, c'est-à-dire, par le centre même de la surface.

203. Cherchons à énoncer l'équation des surfaces à centre, au moyen des carrés des demi-axes principaux ou rectangulaires : à cet effet, supposons successivement $y=0$ et $z=0$; $x=0$ et $z=0$; $x=0$ et $y=0$ dans l'équation

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1,$$

et désignons par a, b, c les valeurs correspondantes de x, y et z; nous aurons, en supposant $a > b > c$ (*),

$$L = \frac{1}{a^2}, \quad M = \frac{1}{b^2}, \quad N = \frac{1}{c^2};$$

ensorte que l'équation de la surface sera

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

et alors il y aura lieu à distinguer trois cas relativement aux signes des termes qui ne dépendent plus des coefficiens essentiellement positifs : on aura donc à considérer

$$\begin{aligned}
(1^\circ)\ldots\ldots\ & b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,\\
(2^\circ)\ \ldots\ldots\ & b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,\\
(3^\circ)\ldots\ldots\ & b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
Lx^2 + My^2 + Nz^2 &= 1,\\
Lx^2 + My^2 - Nz^2 &= 1,\\
Lx^2 - My^2 - Nz^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Si, par exemple, au lieu de la seconde équation

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 1,$$

on prenait celle-ci

$$Lx^2 + Nz^2 - My^2 = 1;$$

on voit que tout ce qu'on dirait de la première relativement à z, s'appliquerait à l'axe des y dans la seconde : c'est pour-

(*) On pourra toujours compter les x, y et z suivant les axes $2a$, $2b$, &c.

quoi il n'y a que trois systèmes de signes essentiellement différens.

Surface limitée dans tous les sens, représentée par

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1,$$
$$ou \quad b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

204. Démontrons d'abord que cette surface est *fermée* : à cet effet, qu'on mène par l'origine des coordonnées une droite quelconque ayant pour équations

$$x = \alpha z, \quad y = 6z :$$

en substituant ces valeurs de x et y dans la proposée, on aura pour la valeur de z, correspondante aux points d'intersection de la surface et de la droite,

$$z = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2 6^2 + a^2b^2}};$$

or quelque valeur qu'on donne à chacune des constantes α et 6, le radical ne peut devenir nul; d'où il suit que les valeurs des coordonnées des points d'intersection, ne peuvent jamais devenir infinies; donc la surface est fermée, et l'origine des coordonnées en est le *centre*, puisque toutes les cordes menées par ce point jusqu'à la surface, de part et d'autre, y sont divisées également.

205. On nomme *sections principales d'une surface*, celles qui sont faites par les plans coordonnés : on les obtient en faisant successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ dans l'équation de la surface, hypothèses qui donnent

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad z^2 = \frac{c^2}{b^2}(b^2 - y^2);$$

on observe que les axes principaux de ces trois ellipses, sont

en même temps ceux de la surface : les points où ces axes rencontrent la surface, en sont dits *les sommets*, et la surface se nomme *ellipsoïde*.

206. Pour avoir les intersections de la surface par des plans respectivement parallèles aux plans coordonnés, il faut, dans son équation, faire successivement

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

ce qui donne (203)

$$My^2 + Nz^2 = 1 - L\alpha^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2},$$

$$Lx^2 + Nz^2 = 1 - M\beta^2 = 1 - \frac{\beta^2}{b^2},$$

$$Lx^2 + My^2 = 1 - N\gamma^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Ces sections sont donc encore des ellipses pour $\alpha < a$, $\beta < b$, $c < \gamma$. Pour $\alpha = a$, $\beta = b$, $c = \gamma$, chacune de ces sections se réduit à un point, ce qu'on savait.

207. Le plan coupant passant par l'axe des z, a pour équations celles de sa trace sur le plan des xy (190, *rem.*); c'est-à-dire,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

r étant l'abscisse comptée de l'origine sur la trace, et φ l'angle de cette trace avec l'axe des x : substituant ces valeurs dans la proposée, on aura cette équation de la courbe d'intersection,

$$Nz^2 + r^2 (M \sin^2 \varphi + L \cos^2 \varphi) = 1,$$

qui représente des ellipses dont les dimensions varient avec φ.

Si $M = L$, auquel cas $b = a$, à cause de $L = \frac{1}{a^2}$, $M = \frac{1}{b^2}$, l'équation précédente devient

$$Nz^2 + Mr^2 = 1 :$$

puisqu'alors toutes les sections faites dans la surface par un plan mené par l'axe des z, sont égales entr'elles, il s'ensuit que la surface est produite par la révolution de cette ellipse autour de l'axe des z : elle est dite alors *de révolution autour de l'axe des* z : on trouve, en effet, que ses sections par des plans parallèles à celui des (xy), ou perpendiculaires à l'axe des z, sont des cercles. Chacune des hypothèses $L=N$, $N=M$ donnerait des ellipsoïdes de révolution autour de chacun des deux autres axes. Enfin, pour $L=M=N$, l'ellipse serait de révolution autour de chacun des trois axes principaux; toutes ses sections parallèles à chacun des trois plans rectangulaires, seraient des cercles, et conséquemment la surface deviendrait celle d'une sphère, ce qui résulte, en effet, de son équation qui devient alors

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

[Voyez ce qui a été dit (197).]

208. L'ellipsoïde porte le nom d'*ellipsoïde alongé*, lorsqu'il est engendré par une ellipse tournant autour de son grand axe : il est dit *ellipsoïde aplati*, lorsqu'il est produit par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe.

209. A mesure que les axes $2a$, $2b$, $2c$ augmentent, les coefficiens L, M, N diminuent : si $2a$ devient ∞, le coefficient L devient nul : alors l'ellipsoïde se change en un cylindre dont l'axe est suivant celui des x, cylindre dont l'enveloppe a pour équation

$$My^2+Nz^2=1 :$$

la base de ce cylindre est l'ellipse

$$z^2=\frac{c^2}{b^2}(b^2-y^2),$$

située dans le plan des (yz) : on peut remarquer que l'équation de ce cylindre perpendiculaire au plan des (yz), n'est que celle de sa trace sur ce plan, ainsi qu'il arrive par rapport à un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés. Si de

plus $M = N$, d'où résulte $c = b$, le cylindre est représentée par

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{M} = b^2,$$

dont la base est le cercle

$$z^2 = b^2 - y^2:$$

c'est enfin le cylindre droit à base circulaire, ou le cylindre de la géométrie. Enfin qu'on ait $L = M = 0$, l'équation de l'ellipsoïde devient

$$Nz^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad z = \pm\sqrt{\frac{1}{N}} = \pm c,$$

et elle représente deux plans parallèles à celui des (xy), situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous, à des distances égales.

Surface illimitée dans tous les sens, ou hyperboloïde à une nappe, représentée par l'équation

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 1,$$

$$\textit{ou} \quad b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

210. Les trois sections principales de cette surface, celles qui sont faites par les plans coordonnés, ont pour équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad z^2 = \frac{c^2}{b^2}(y^2 - b^2),$$

dont la première représente une ellipse, et les deux autres sont des hyperboles.

211. En cherchant les intersections de cette surface par les trois axes, c'est-à-dire, en faisant $x = 0$ et $y = 0$, $x = 0$ et $z = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, on trouve c imaginaire; et les axes a et b réels : ce qui prouve que l'axe des z est dans l'espace vide de la surface qui n'a que quatre sommets réels aux extrémités des axes $2a$ et $2b$.

212. Pour mieux étudier cette surface, recherchons ses intersections avec la droite

$$x = \alpha z, \qquad y = \zeta z,$$

pour toutes les valeurs possibles de α et ζ : les coordonnées de ces intersections sont

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\zeta^2-a^2b^2}}, \quad \alpha.\frac{abc}{\sqrt{}}, \quad \zeta.\frac{abc}{\sqrt{}},$$

le radical étant le même. Faisant le radical nul, ce qui rend infinies les valeurs des coordonnées, on a

$$b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\zeta^2 - a^2b^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\zeta = \frac{b\sqrt{a^2-c^2\alpha^2}}{ac},$$

valeur de ζ qui sera réelle pour $\alpha < \frac{a}{c}$: les équations de la droite qui coupe la surface en un point situé à une distance infinie de l'origine des coordonnées, deviennent donc

$$x = \alpha z, \qquad y = \frac{bz\sqrt{a^2-c^2\alpha^2}}{ac}.$$

Si on élimine α entre ces deux équations, celle qui en résultera étant indépendante de α et ζ, conviendra à toutes les positions de la droite, c'est-à-dire, qu'elle appartiendra à une surface conique dont le sommet est à l'origine des coordonnées, et qui sera asymptote de la surface, puisque toutes ses arêtes ne rencontreront la surface qu'à l'infini : on trouve que cette surface conique est représentée par

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0,$$

premier membre de la proposée; c'est ainsi, que par rapport à l'hyperbole rapportée au centre et aux axes principaux, l'équation des asymptotes

$$y = \pm \frac{B}{A}x, \qquad \text{d'où} \qquad A^2y^2 - B^2x^2 = 0,$$

n'est que le premier membre de celle de l'hyperbole

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2.$$

213. Si l'on fait encore pour x et y les substitutions

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

déjà employées dans l'ellipsoïde, on trouvera

$$Nz^2 - r^2(L\cos^2\varphi + M\sin^2\varphi) = -1;$$

d'où l'on conclut que tout plan mené par l'axe des z, coupe la surface suivant une hyperbole.

214. Si l'on fait successivement $x = \alpha$, $y = \mathcal{C}$, $z = \gamma$, pour avoir les coupes de la surface par trois plans respectivement parallèles aux plans coordonnés, on trouvera

$$\begin{aligned} My^2 - Nz^2 &= 1 - L\alpha^2, \\ Lx^2 - Nz^2 &= 1 - M\mathcal{C}^2, \\ Lx^2 + My^2 &= 1 + N\gamma^2. \end{aligned}$$

Ainsi les sections par des plans parallèles à (xy), sont des ellipses, et les deux autres sont des hyperboles.

215. Lorsque $M = L$, auquel cas $b = a$, les sections faites par le plan des (xy) et par des plans parallèles, deviennent des cercles, et celles qui résultent des plans menés par l'axe des z, sont toujours des hyperboles égales : donc l'hyperboloïde est alors de révolution autour de l'axe des z (197).

216. Lorsque a est infini, auquel cas $L = 0$, la proposée devient

$$My^2 - Nz^2 = 1, \qquad \text{ou} \qquad Nz^2 - My^2 = -1,$$

et elle représente un cylindre perpendiculaire au plan des (xy), dont la base ou la section par le plan des (zy), est une hyperbole.

25..

217. Nous avons trouvé plus haut cette équation de la surface conique asymptotique de l'hyperboloïde

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0, \quad \text{ou} \quad Nz^2 - My^2 - Lx^2 = 0:$$

sa section par un plan suivant l'axe des z, est

$$Nz^2 - r^2(L\cos^2\varphi + M\sin^2\varphi) = 0,$$

équation qui représente deux lignes droites menées par l'origine, ce qui est le caractère des surfaces coniques. Pour $L = M$, c'est-à-dire, pour l'hyperboloïde de révolution autour de l'axe des z, cette surface conique devient

$$Nz^2 - Lr^2 = 0:$$

toutes les génératrices font donc des angles égaux avec l'axe des z, et le cône qui a son sommet à l'origine, devient un cône droit à base circulaire.

Surface illimitée dans tous les sens, ou hyperboloïde à deux nappes, représentée par l'équation

$$Lx^2 - My^2 - Nz^2 = 1,$$

$$\textit{ou} \quad b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

218. Les sections principales ont pour équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$b^2z^2 + c^2y^2 + b^2c^2 = 0:$$

les deux premières faites par les plans des (xy) et des (xz), sont des hyperboles; la troisième par le plan des (zy) est imaginaire; ce qui indique que la surface a des nappes infinies dans le sens des plans (xy), (xz), entre lesquelles il reste un espace vide dans lequel est situé le plan des (yz).

219. Sous les hypothèses $x=0$ et $y=0$, $x=0$ et $z=0$, les axes z et y sont imaginaires; pour $y=0$ et $z=0$, on trouve $x=\pm a$: ainsi la surface n'a que deux sommets réels sur l'axe des x.

220. Si l'on combine l'équation de cette surface avec les suivantes,

$$x=\alpha z, \quad y=\mathcal{C}z,$$

ainsi que nous venons de le faire à l'égard de la première espèce d'hyperboloïde, on trouve pour les coordonnées des intersections,

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2-a^2c^2\mathcal{C}^2-a^2b^2}}, \quad \alpha\frac{abc}{\sqrt{\quad}}, \quad \mathcal{C}\frac{abc}{\sqrt{\quad}},$$

et pour le radical égalé à zéro,

$$\mathcal{C}=\frac{b\sqrt{c^2\alpha^2-a^2}}{ac},$$

valeur réelle pour $\alpha^2>\frac{a^2}{c^2}$, et imaginaire sous la relation inverse. Si on élimine α entre les équations

$$x=\alpha z, \quad y=\frac{bz\sqrt{c^2\alpha^2-a^2}}{ac},$$

on obtient cette équation

$$b^2c^2x^2-a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0,$$

qui est celle d'une surface conique qui est asymptotique de l'hyperboloïde à deux nappes, et dont le sommet est l'origine même des coordonnées.

221. Si l'on fait dans la proposée,

$$y=r\cos\varphi, \quad z=r\sin\varphi,$$

l'équation résultante

$$\mathrm{L}x^2-r^2(\mathrm{M}\cos^2\varphi+\mathrm{N}\sin^2\varphi)=1,$$

ou

$$r^2(\mathrm{M}\cos^2\varphi + \mathrm{N}\sin^2\varphi) - \mathrm{L}x^2 = -1,$$

représente la coupe de la surface par un plan suivant l'axe des x, coupe qui est une hyperbole : la surface sera de révolution autour de cet axe, pour $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, ou pour $b = c$.

222. On peut encore couper cette surface par des plans respectivement parallèles aux plans coordonnés : en faisant $x = \alpha$, on trouve

$$a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = b^2c^2(\alpha^2 - a^2):$$

pour $\alpha < a$, la section est imaginaire; pour $\alpha = a$, elle est un point, et on a les deux sommets réels de la surface; pour $\alpha > a$, on obtient des ellipses dont les dimensions augmentent avec α. Pour $y = \mathcal{C}$ et $z = \gamma$, on obtient des hyperboles.

223. Ce qui distingue essentiellement cette surface de la précédente, c'est l'intervalle qui sépare les deux nappes.

224. Dans l'ouvrage ayant pour titre : *Application de l'Analyse à la Géométrie, à l'usage des élèves de l'École Polytechnique*, M. *Monge* démontre que toute surface du second degré peut-être engendrée de deux manières différentes par un cercle variable de rayon, dont le centre se meut sur un diamètre de la surface, et dont le plan demeure parallèle à lui-même; et il tire de là cette conclusion, qu'il n'existe aucun point sur la surface du second degré par lequel on ne puisse faire passer deux circonférences de cercle qui soient entièrement sur la surface. Pour établir cette proposition, il coupe la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

par un plan

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y,$$

et il obtient la projection de la section sur le plan des (xy); il coupe ensuite la surface du second degré par le même plan, et il en trouve la section projetée sur le même plan (xy),

puis il identifie ces deux projections par des valeurs réelles de A, B et r qui sont ici les indéterminées de la question, en tenant compte des signes de L, M et N qui sont les caractéristiques de chaque surface : il trouve par cette analyse,

1°. Que l'ellipsoïde est coupé suivant un cercle par le plan qui passe par l'axe moyen $2b$, et qui fait avec le plan (xy), un angle dont la tangente $= \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$;

2°. Que l'hyperboloïde à une nappe est coupé suivant un cercle par un plan passant par le grand axe $2a$, et faisant avec le plan (xy) un angle dont la tangente $= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}$;

3°. Que l'hyperboloïde à deux nappes peut être coupé suivant des cercles, par des plans parallèles à celui qui passerait par l'axe moyen $2b$, et qui ferait, avec le plan des (xy), un angle ayant pour tangente $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}}$.

Mais comme chacune de ces tangentes a deux valeurs, il y a donc deux positions du plan sécant : d'ailleurs M. *Monge* a démontré, dans l'ouvrage cité plus haut, que toutes les sections parallèles d'une surface du second degré, sont semblables et ont leurs centres sur un diamètre (202). Donc, etc.

DES SURFACES DÉPOURVUES DE CENTRE.

225. Nous avons trouvé (199) que ces sortes de surfaces étaient représentées par

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta z = 0:$$

c'est ce qu'on peut encore démontrer comme il suit. Par l'une des extrémités du grand axe $2a$ de l'ellipsoïde

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

menons des parallèles aux axes principaux $2a$, $2b$, $2c$: les nouvelles coordonnées d'un point quelconque, seront $x+a=x'$,

y et z; ensorte que par ces substitutions dans l'équation précédente, on aura celle-ci

$$b^2c^2x'^2 - 2ab^2c^2x' + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = 0 \ldots\ldots (2).$$

On a déjà vu (205) que l'ellipse intersection de l'ellipsoïde par le plan (xy), a pour équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

et on sait (103) que le demi-paramètre de cette ellipse, c'est-à-dire, l'ordonnée du foyer, $y = \frac{b^2}{a}$; ensorte que reportant cette valeur de y^2 dans l'équation précédente, on trouve $b^2 = a^2 - P^2$; mais P étant l'abscisse du foyer, comptée du centre, et p celle du même foyer, comptée de l'origine, on a $P = a - p$, ce qui donne

$$b^2 = 2ap - p^2.$$

On trouverait de même,

$$c^2 = 2ap' - p'^2,$$

p' étant la distance de l'origine au foyer de l'autre section faite dans la même surface par le plan (xz). Substituant ces valeurs de b^2 et c^2 dans (2), et remplaçant x' par x, on trouve

$$(2ap - p^2)[(2ap' - p'^2)(x^2 - 2ax) + a^2z^2] + a^2(2ap' - p'^2)y^2 = 0.$$

Lorsque le centre s'éloigne à l'infini, les quantités p et p' ne changent pas, mais $a = \infty$, et par là l'équation devient

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0;$$

de même forme que (1), et nous la représenterons par

$$Nx = Lz^2 + My^2,$$

équation qui ne fournit que ces trois combinaisons de signes,

$$\begin{aligned} Nx &= Lz^2 + My^2, \\ Nx &= Lz^2 - My^2, \\ Nx &= -Lz^2 + My^2; \end{aligned}$$

or les deux dernières étant de même forme, tout ce que l'on dira de l'une pourra s'appliquer à l'autre, en changeant l'axe des z en celui des y, et réciproquement ; ensorte que nous n'aurons que les variétés données par les deux premières équations.

Du paraboloïde elliptique donné par
$Lz^2 + My^2 = Nx.$

226. Les trois sections principales sont

$$Lz^2 + My^2 = 0, \quad Lz^2 = Nx, \quad My^2 = Nx:$$

la première de ces équations donne l'origine; les deux autres représentent des paraboles dont le grand axe est celui des x.

Pour $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, on trouve

$$\begin{aligned} Lz^2 + My^2 &= N\alpha, \\ Lz^2 &= Nx - M\beta^2, \\ My^2 &= Nx - L\gamma^2. \end{aligned}$$

Ainsi les sections faites par des plans parallèles aux plans (xy) et (zx), sont des paraboles, et les sections par des plans parallèles à celui des (zy), sont des ellipses dont les dimensions augmentent avec α, et dont les centres sont sur l'axe des x: c'est pour cela qu'on a nommé cette surface *paraboloïde elliptique*.

La surface en question ne peut s'étendre qu'à droite du plan (zy).

227. Toutes les sections faites par des plans suivant l'axe des x, sont des paraboles dont on obtient l'équation en faisant, dans la proposée

$$z = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi,$$

ce qui donne

$$Nx = r^2 (L \sin^2 \varphi + M \cos^2 \varphi),$$

et la surface est de révolution autour de l'axe des x pour $L = M$, auquel cas les sections par des plans perpendiculaires à l'axe des x, sont des cercles.

Du paraboloïde hyperbolique donné par

$Lz^2 = My^2 - Nx.$

228. Nous prenons la troisième équation. Les sections principales sont

$$Lz^2 = My^2, \quad Lz^2 = -Nx, \quad My^2 = Nx;$$

la première équation représente le système de deux droites qui se coupent à l'origine; les deux autres représentent des paraboles construites dans les plans (xz) et (xy) sur l'axe des x et sur son prolongement.

Pour $x = \alpha$, $y = \mathcal{C}$, $z = \gamma$, on obtient

$$\begin{aligned} Lz^2 - \quad My^2 &= -N\alpha, \\ Lz^2 = -Nx \quad &+ M\mathcal{C}^2, \\ My^2 = \quad Nx \quad &+ L\gamma^2 : \end{aligned}$$

les deux dernières appartiennent à des paraboles, et la première représente une hyperbole située dans un plan parallèle à (zy), ce qui a fait donner à cette surface le nom de *paraboloïde hyperbolique*. Pour des plans sécans, à gauche du plan (zy), α devient négatif, et les hyperboles intersections de la surface par ces plans, sont représentées par

$$Lz^2 - My^2 = N\alpha.$$

229. Si dans l'équation

$$Lz^2 = Nx,$$

section de la surface par le plan des (xz), nous représentons (fig. 168) [*] par AP la valeur de x, cette équation donnera

$$z^2 = \frac{N}{L} \times AP = \overline{PM}^2.$$

Si à la distance AP on mène un plan parallèle à (zy), la section faite par ce plan, aura pour équation

$$Lz^2 - My^2 = N \times AP;$$

l'axe réel de cette hyperbole sera la valeur de z qui répond à $y = 0$, c'est-à-dire,

$$z^2 = \frac{N}{L} \times AP = \overline{PM}^2;$$

donc les sommets de l'hyperbole

$$Lz^2 - My^2 = -N\alpha,$$

seront sur la parabole

$$Lz^2 = Nx,$$

en faisant $x = -\alpha$.

A mesure que le plan sécant, et parallèle à (zy), s'approche de (zy), l'axe réel de l'hyperbole diminue jusqu'à devenir nul, et pour $x = 0$ on a deux droites.

230. L'équation de l'intersection de la surface par un plan mené suivant l'axe des x, est

$$Nx = r^2 (M \cos^2 \varphi - L \sin^2 \varphi),$$

en posant toujours

$$z = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi,$$

[*] Voyez, sur cette figure, ce qui est dit (232) relativement au paraboloïde hyperbolique.

elle représente une parabole qui a son sommet à l'origine où r est nul. Cette parabole se prolongeant à l'infini, doit rencontrer le plan parallèle à (zy), mené par PM, (fig. 168) : or tout point de cette parabole appartenant à la surface, et l'hyperbole qui passe par M, contenant tous les points de cette surface, qui sont dans le plan parallèle à (yz) mené par PM, il s'ensuit que la parabole doit passer par deux points de l'hyperbole, qu'on trouvera en faisant $x = \text{AP}$ dans l'équation précédente, ce qui donnera

$$r = +\sqrt{\frac{\text{N} \times \text{AP}}{\text{M}\cos^2\varphi - \text{L}\sin^2\varphi}},$$

$$r = -\sqrt{\frac{\text{N} \times \text{AP}}{\text{M}\cos^2\varphi - \text{L}\sin^2\varphi}}.$$

ainsi ces paraboles coupent l'hyperbole en deux points, et les arcs d'hyperbole entre chaque sommet et ce point, sont égaux.

On observera que pour $\text{tang}\,\varphi = \sqrt{\frac{\text{M}}{\text{L}}}$, r devient infini, ce qui s'accorde avec la position des plans asymptotes que nous allons déterminer.

231. Soient, à cet effet,

$$z = \alpha x, \quad y = \beta x :$$

l'équation de la surface deviendra

$$\text{L}\alpha^2 x^2 = \text{M}\beta^2 x^2 - \text{N}x,$$

d'où

$$x = 0, \quad x = \frac{\text{N}}{\text{M}\beta^2 - \text{L}\alpha^2},$$

et conséquemment,

$$z = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0,$$

$$x = \frac{\text{N}}{\text{M}\beta^2 - \text{L}\alpha^2}, \quad y = \beta \cdot \frac{\text{N}}{\text{M}\beta^2 - \text{L}\alpha^2}, \quad z = \alpha \cdot \frac{\text{N}}{\text{M}\beta^2 - \text{L}\alpha^2};$$

pour $\alpha = 6\sqrt{\frac{M}{L}}$, on a

$$z = \infty, \quad x = \infty, \quad y = \infty;$$

et

$$z = \alpha x, \quad y = \frac{\alpha x}{\sqrt{\frac{M}{L}}};$$

l'élimination de α conduit à ce résultat

$$Lz^2 - My^2 = 0,$$

qui est le premier membre de l'équation de la surface, et qui représente deux plans asymptotes de cette surface, savoir,

$$y = z\sqrt{\frac{L}{M}}, \quad y = -z\sqrt{\frac{L}{M}},$$

plans suivant l'axe des x, et qui renferment toutes les asymptotes des hyperboles dont on sait d'ailleurs que les centres sont sur l'axe des x, et dont les élémens de position des asymptotes, sont indépendans de α.

232. Tout ce que nous avons dit sur les surfaces du second degré, représentées par les réduites

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1, \quad Lz^2 + My^2 = Nx,$$

se trouvera résumé dans ce qui suit :

Ellipsoïde.

Le point A (fig. 164) étant l'origine des coordonnées et le centre de la surface, l'ellipse (1) est la section de la surface par le plan (xy); l'ellipse (2) est sa section par le plan (xz), et l'ellipse (3) est sa section par le plan (yz) : les axes de ces trois ellipses sont $2a$, $2b$, $2c$, ou SS', $S''S'''$, $S^{IV}S^{V}$, et S, S', S'', S''', S^{IV}, S^{V} sont les six sommets réels de la surface. Il faut concevoir les centres A' et A'' en A, l'axe

SS′ de la section (2) sur l'axe SS′ de la section (1), et le plan de la section (2), qui est celui des (xz), perpendiculaire au plan (xy) de la section (1), plan horizontal; enfin l'axe S″S‴ de la section (3) sur l'axe S″S‴ de la section (1), et le plan de (3) qui est celui des (yz), en même temps perpendiculaire à celui des sections (1) et (2). Si du point A ou A′, comme centre, avec le rayon AS″ = A′α = b, on décrit un arc de cercle qui coupe l'ellipse (2) aux points α et a, les deux droites αα′ et AA′, ou aa' et AA′ déterminent la position des plans qui coupent l'ellipsoïde suivant un cercle.

Hyperboloïde à une nappe.

Le plan (xy) coupe cette surface suivant l'ellipse (1), (fig. 165); les plans (xz) et (yz) la coupent suivant les hyperboles (2) et (3); S, S′, S″, S‴ sont les quatre sommets réels. Il faut encore concevoir les deux centres A′, A″ en A, l'axe SS′ de la section (2) sur l'axe SS′ de la section (1), et le plan (xz) de la section (2), perpendiculaire au plan (xy) de la section (1); enfin l'axe S″S‴ de la section (3) sur l'axe S″S‴ de la section (1), et le plan (yz) de la section (3) perpendiculaires aux plans (xy), (xz) des sections (1) et (2). Si du point A″, comme centre, avec A″α = AS = a, comme rayon, on décrit une circonférence qui coupe l'hyperbole (3) en α et a, les deux droites αα′ et AA″, ou aa' et AA″ détermineront la position des plans qui coupent l'hyperboloïde suivant un cercle.

Hyperboloïde à deux nappes.

Le plan (xy) et le plan (xz) coupent cette surface suivant les hyperboles (1) et (2), (fig. 166); S et S′ sont les deux seuls sommets réels de la surface. Il faut toujours se représenter l'axe SS′ de la section (2) suivant l'axe SS′ de la section (1), et le plan (xz) de la première section perpendiculaire au plan (xy) de la seconde. L'hyperboloïde à deux

nappes est composée de deux surfaces isolées qui laissent entr'elles un espace indéfini, vide et limité par les cônes asymptotiques de la surface, dont le sommet commun est en A, tandis que la surface hyperboloïde à une nappe, est continue et formée d'hyperboles dans des plans par l'axe des z, dont les axes sont tous les diamètres de l'ellipse (1), (fig. 165), et les sommets sont tous les points de cette ellipse.

Paraboloïde elliptique.

Les paraboles (1) et (2), (fig. 167), sont les sections de la surface, par les plans (xy), (zx) : l'origine A des coordonnées, est le sommet commun à ces deux paraboles, qui ont pour grand axe celui des x, qui est la commune intersection de ces plans perpendiculaires l'un à l'autre. Alors le plan (zy) touche la surface en son sommet, et les plans parallèles à (zy) la coupent suivant des ellipses. Les droites st, $s't'$, $s''t''$, etc. sont les traces des plans parallèles aux plans (xz) qui, comme ces derniers, coupent la surface suivant des paraboles dont les sommets sont en A, s, s', s'', paraboles qui sont les mêmes que celle de la section (2) [*].

Paraboloïde hyperbolique.

Les paraboles (1) et (2) sont les sections de la surface, par les plans des (xy) et des (xz) : les axes principaux de ces paraboles, sont l'axe des x, et il faut concevoir que le

---

[*] Les sections parallèles au plan (xz) sont (226) représentées par $Lz^2 = Nx - M\zeta^2$, ζ étant la distance comptée sur l'axe des y, du plan de la section parallèle à celui des (xz) : or, pour $Nx - M\zeta^2 = 0$, on a $z = 0$; donc le sommet de toute parabole dont le plan est parallèle à (xz), est sur la parabole de la section (1) : en faisant $x = \frac{M\zeta^2}{N} + X$, on a $Lz^2 = NX$.

sommet A de la section (2) étant réuni au sommet A de la section (1), et l'axe principal de la section (2) étant le prolongement de celui de la section (1), à gauche de l'origine A, le plan de la première section soit perpendiculaire à celui de la seconde. Toutes les sections faites dans la surface, par des plans parallèles à celui des (yz), sont des hyperboles dont les sommets sont sur la parabole (2). Les droites ts, $t's'$, $t''s''$, etc. sont les traces des plans parallèles à celui des (xz), qui coupent la surface suivant la parabole (2) : les sommets de ces sections paraboliques, sont A, s, s', s'', etc. Les droites tt', tt' représentent les intersections de la surface par le plan des (yz). Il faut encore se représenter les deux plans asymptotes de la surface, conduits suivant l'axe des x, et qui contiennent les asymptotes des hyperboles dont les sommets sont sur la parabole (2).

233. Il sera facile de discuter la surface de l'équation

$$Az^2 + By + Cx = 0,$$

comprise dans l'équation générale du second ordre entre trois variables; c'est pourquoi nous nous dispenserons de nous y arrêter.

234. On peut aussi rapporter les intersections des surfaces par un plan, à des coordonnées prises dans ce plan. A cet effet, on fera $z' = 0$ dans les formules (31, chap. XVIII), et dans les seconds membres de ces formules, on ajoutera α, 6, γ, coordonnées de la nouvelle origine, par rapport à l'ancienne.

Ainsi on emploiera ces formules

$$\begin{aligned} x &= \quad x'\cos\psi + y'\cos\theta\sin\psi + \alpha, \\ y &= -x'\sin\psi + y'\cos\theta\cos\psi + 6, \\ z &= -y'\sin\theta + \gamma, \end{aligned}$$

et on substituera ces valeurs de x, y, z dans l'équation

$$Hx^2 + H'y^2 + H''z^2 + Px + P'y + P''z = 0,$$

qui représentent les surfaces qui ont un centre, et celles qui en sont dépourvues, l'origine étant d'ailleurs sur un point de la surface.

Maintenant, si l'on veut que l'intersection soit un cercle, on disposera des indéterminées ψ et θ, de telle manière que le coefficient du rectangle étant nul, ceux de x'^2 et y'^2 soient égaux et de même signe; et on trouvera que ces conditions sont remplies par les deux équations

$$\mathrm{H}\cos^2\theta\sin^2\psi + \mathrm{H}'\cos^2\theta\cos^2\psi + \mathrm{H}''\sin^2\theta$$
$$- \mathrm{H}\cos^2\psi - \mathrm{H}'\sin^2\psi = 0,$$

$$\sin\psi\cos\psi\cos\theta = 0,$$

qui servent à déterminer ψ et θ. La seconde est satisfaite par $\cos\theta = 0$, et la première donne

$$\text{tang}\,\psi = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}''}{\mathrm{H}''-\mathrm{H}'}}:$$

la réalité de tang ψ exige que la quantité sous le radical, soit positive. Nous ne pousserons pas plus loin cette question, sur laquelle nous renvoyons à l'excellent Traité de *M. Biot*, et nous passerons à des applications des formules ci-dessus.

Équation de l'intersection de la surface conique par un plan.

235. Nous regarderons toujours la surface conique comme engendrée par le mouvement d'une droite qui, dans toutes ses positions, est assujétie à passer par le même point donné de l'espace, et par tous les points d'une circonférence donnée dans le plan horizontal (chap. XV) ; l'expression analytique de cette génération, sera l'équation de la surface conique : nous couperons cette surface par un plan, et il s'agira de trouver l'équation de la courbe d'intersection.

Les équations d'une droite assujétie à passer par un point

26

x', y', z' ... ce (fig. 169), sont (chap. XVI)

$$(1)\ldots\ldots x-x'=a(z-z'), \qquad y-y'=b(z-z')\ldots(2);$$

la courbe individuelle qui dirige le mouvement de la génératrice, étant un cercle dans le plan horizontal (xy), peut être considérée comme l'intersection d'une sphère par ce plan, ensorte qu'on aura ces équations de la sphère et du plan

$$(3)\ldots\ldots x^2+y^2+z^2=r^2, \qquad z=0\ldots\ldots(4),$$

r désignant le rayon. Les équations (1), (2), (3), (4) doivent avoir lieu en même temps : or cette dernière réduit les trois premières aux suivantes,

$$x-x'=-az', \quad y-y'=-bz', \quad y^2+x^2=r^2,$$

dont les deux premières donnent

$$x^2=(x'-az')^2, \quad y^2=(y'-bz')^2,$$

substituant ces valeurs dans la troisième, on trouve cette équation de la surface conique

$$x'^2-2ax'z'+a^2z'^2+y'^2-2by'z'+b^2z'^2=r^2\ldots\ldots(5);$$

remplaçant a et b par leurs valeurs prises dans (1) et (2), à l'effet de faire rentrer dans (5) les coordonnées générales x, y, z de tout point de cette surface, puisqu'elles sont celles de la génératrice dans toutes ses positions, on trouve enfin

$$z'^2\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)^2-2y'z'\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)+z'^2\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)^2-2x'z'\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)$$
$$=r^2-(y'^2+x'^2)\ldots\ldots\ldots(6).$$

Transportons maintenant l'origine des coordonnées du point A qui représente l'origine, au point S ou au sommet du cône (fig. 170), en laissant les nouveaux axes parallèles aux axes primitifs, et désignons par X, Y, Z les points de la surface rapportée à la nouvelle origine, celles du centre A rapporté

à l'origine S, étant x', y', z' : nous aurons ces relations

$$X = x' - x, \quad Y = y' - y, \quad Z = z' - z :$$

ces valeurs reportées dans (6) donnent, après les réductions et le changement de X, Y, Z en x, y, z,

$$(x'^2 + y'^2 - r^2)\,z^2 + z'^2\,(x^2 + y^2) - 2x'z'xz - 2y'z'yz = 0 \ldots . (7).$$

Nous supposerons maintenant le cône en question coupé par un plan perpendiculaire à celui des (xz), et nous chercherons les équations de la courbe d'intersection pour les différentes positions du plan sécant, cette courbe étant rapportée à des coordonnées prises dans le plan coupant.

Soient (fig. 171) $Y''KX''$ ce plan coupant, N l'origine des coordonnées rectangulaires x'', y'' des points tels que M de la courbe d'intersection, coordonnées comptées de N sur NX'' et sur une parallèle à l'axe KY'' menée par N dans le plan coupant : désignons par θ l'angle du plan sécant avec le plan horizontal, et par α, γ les coordonnées de la nouvelle origine N rapportée à l'ancienne S : on aura ces relations

$$\begin{aligned}
x &= Sp + NP = \alpha + x'' \cos\theta = a + mx'',\\
y &= y'',\\
z &= Np + PM = \gamma + x'' \sin\theta = \gamma + nx''.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans (7), et représentant $x'^2 + y'^2 - r^2$ par p, on aura cette équation générale de l'intersection, après avoir changé x'', y'', z'' en x, y, z,

$$\begin{aligned}
z'^2y^2 - 2ny'z'xy &+ (pn^2 + m^2z'^2 - 2mnx'y')\,x^2\\
&- 2\gamma y'z'y + 2\,(p\gamma n + \alpha m z'^2 - \alpha n x'z' - \gamma m x'z')\,x\\
&+ p\gamma^2 + \alpha^2 z'^2 - 2\alpha\gamma x'z' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8),
\end{aligned}$$

laquelle, sous les abréviations

$$\begin{aligned}
&z'^2 = A, \quad -2ny'z' = B, \quad pn^2 + m^2z'^2 - 2mnx'y' = C,\\
&-2\gamma y'z' = D, \quad 2\,(p\gamma n + \alpha m z'^2 - \alpha n x'z' - \gamma m x'z') = E,\\
&p\gamma^2 + \alpha^2 z'^2 - 2\alpha\gamma x'z' = F,
\end{aligned}$$

devient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots (9),$$

qui est l'équation générale du second ordre entre deux variables, discutée (chap. IV).

Examinons les intersections dues aux diverses positions du plan sécant.

Supposons ce plan mené par S, et de plus l'origine N en S (fig. 171) : on a

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad \text{d'où} \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

et l'équation (9) se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0,$$

qui représente deux droites menées par l'origine S, lesquelles sont deux arêtes du cône ; ces droites peuvent être réelles toutes deux, ou imaginaires, ou se réduire à une droite unique, suivant les relations

$$B^2 - 4AC > 0, \quad < 0, \quad = 0.$$

Si le plan coupant, que nous supposerons toujours passer par l'origine S, vient à coïncider avec le plan primitif YSX, on aura

$$\sin\theta = n = 0, \qquad \cos\theta = m = 1, \qquad \alpha = 0, \qquad \gamma = 0,$$

et l'équation (9) devient

$$y^2 + x^2 = 0,$$

équation d'un point qui est l'origine.

Par l'axe AS du cône (fig. 172), et par une parallèle au plan (zx), menons un plan qui coupera la base du cône suivant le diamètre BD, et sa surface suivant les arêtes SB, SD parallèles au plan (xz), et supposons que le plan coupant devienne parallèle à SB. Si sur les coordonnées du centre A de la base,

comptées de S, on construit un parallélepipède, on aura

$$\theta = \mathrm{EBF} \quad \text{et} \quad \tang \theta = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EB}} = \frac{z'}{x'-r} = \frac{n}{m};$$

d'où l'on conclut

$$(nx' - mz')^2 = r^2n^2,$$

et, en développant,

$$n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - r^2n^2 = 0\ldots.(10),$$

et conséquemment cette caractéristique

$$\begin{aligned} B^2-4AC &= -4z'^2(-n^2y'^2+pn^2+m^2z'^2-2mnx'z') \\ &= -4z'^2(n^2x'^2-2mnx'z'+m^2z'^2-r^2n^2)=0\ldots(11), \end{aligned}$$

en remplaçant p par sa valeur et tenant compte de l'équation de condition (10). On a donc, pour cette position du plan coupant qui donne une courbe indéfinie dans un sens, et limitée dans l'autre, c'est-à-dire, la parabole,

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{[2(BD-2AE)x+B^2-4AF]}.$$

Pour $x=0$, $y=0$, le plan coupe le cône suivant l'arête SB; alors, comme on l'a vu plus haut, $D=0$, $E=0$, $F=0$, et l'équation précédente devient

$$y = -\frac{Bx}{2A}.$$

Lorsque le plan sécant est parallèle à l'autre arête SD, on a

$$\tang\theta = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{ED}} = \frac{z'}{x'+r} = \frac{n}{m},$$

et on retombe sur l'équation de condition (11) : ce plan coupe alors suivant une parabole, le cône inférieur opposé par le sommet à celui que nous avons considéré jusqu'ici.

Supposons qu'à partir de la position parallèle à SB, le plan coupant s'incline vers le plan horizontal, de manière à rencontrer les deux cônes opposés : il résultera de cette position du plan une courbe indéfinie dans les deux sens, formée de deux branches tracées sur les deux cônes, et qui est l'hyperbole ; mais alors

$$\tang \theta = \frac{n}{m} < \frac{z'}{x'-r}, \quad \text{d'où} \quad (nx'-mz')^2 < r^2n^2,$$

c'est-à-dire,

$$n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - r^2n^2 < 0,$$

et de là,

$$-4z'^2(n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - r^2n^2) = B^2 - 4AC > 0 \ldots (12),$$

caractéristique de l'hyperbole.

Supposons enfin que le plan coupant traverse le cône BSD, position qui sera donnée par l'hypothèse

$$\tang \theta = \frac{n}{m} > \frac{z'}{x'-r};$$

on en déduira

$$-4z'^2(n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - n^2r^2) = B^2 - 4AC < 0 \ldots (13),$$

caractéristique de l'ellipse qui est, en effet, la courbe d'intersection : elle peut être un cercle, et nous rechercherons la position correspondante du plan sécant. Il faut que l'équation de l'intersection soit de la forme

$$y^2 + x^2 - 2y'y - 2x'x + y'^2 + x'^2 - r^2 = 0$$

(chap. X) : on a donc en même temps $A = C$, $B = 0$, c'est-à-dire,

$$pn^2 + m^2z'^2 - 2mnx'z' = z'^2, \qquad ny'z' = 0 :$$

équations qui reviennent à celles-ci :

$$\frac{n}{m}\left[(p-z'^2)\frac{n}{m}-2x'z'\right]=0, \qquad y'z'.\frac{n}{m}=0.$$

Ainsi, l'une des racines est

$$\frac{n}{m}=\operatorname{tang}\theta=0\,;$$

donc, comme on le sait, la section est circulaire lorsque le plan coupant est parallèle à la base du cône : la première de ces équations admet encore la racine

$$\frac{n}{m}=\frac{2x'z'}{p-z'^2}=\operatorname{tang}\theta\,;$$

mais la seconde ne peut devenir nulle pour cette valeur de θ, qu'autant qu'on a en même temps $y'=0$, auquel cas la condition $B=0$ a toujours lieu : sous cette hypothèse, le centre de la base du cône, est dans le plan (xz), qui devient le plan par l'axe, et il s'agit de trouver la situation du plan coupant. On a (fig. 173)

$$AB=\frac{BD}{2}=r, \quad AG=x', \quad SG=z', \quad BG=x'-r.$$

Posons $DBS=B$, $BDS=D$, les formules trigonométriques connues donneront

$$\operatorname{tang}(B-D)=\frac{\operatorname{tang}B-\operatorname{tang}D}{1+\operatorname{tang}B.\operatorname{tang}D},$$

or

$$\operatorname{tang}B=-\frac{SG}{BG}=-\frac{z'}{x'-r},$$

$$\operatorname{tang}D=\frac{SG}{DG}=\frac{z'}{x'+r}\,;$$

donc

$$\operatorname{tang}(B-D)=-\frac{2x'z'}{x'^2-z'^2-r^2}=-\frac{2x'z'}{p-z'^2}\,;$$

et conséquemment,

$$\tang \theta = - \tang (B - D);$$

donc si l'on mène la ligne R'BR de manière que l'angle SBR = D, on aura

$$\tang R'BD = - \tang R'BG = - \tang (B - D) = \tang \theta.$$

Ainsi une section par un plan perpendiculaire à BSD, suivant la droite RR', ou toute autre qui lui soit parallèle, sera circulaire.

Lorsque $x' = o$, la seconde valeur de tang θ devient nulle, les deux sections se confondent, et alors le cône est droit, en observant qu'on a déjà $y' = o$.

Faisons en même temps $y' = o$, $x' = o$ dans l'équation (8) : alors l'axe du cône coïncide avec l'axe SZ, et cette équation se simplifie et devient

$$z'^2 y^2 + (-r^2 n^2 + m^2 z'^2)\, x^2 + 2(-r^2 \gamma n + \alpha m z'^2)\, x$$
$$+ \alpha^2 z'^2 - r^2 \gamma^2 = o \ldots\ldots\ldots\ldots (14):$$

les coefficiens A, B, C sont ici

$$A = z'^2, \quad B = o, \quad C = - r^2 n^2 + m^2 z'^2 :$$

et la caractéristique de la parabole devient $-4AC$; mais comme le coefficient A ne peut être nul, il faut que

$$C = - r^2 n^2 + m^2 z'^2 = o :$$

ainsi, pour la parabole, l'équation (14) se réduit à

$$z'^2 y^2 + 2(-r^2 \gamma n + \alpha m z'^2)\, x + \alpha^2 z'^2 - r^2 \gamma^2 = o \ldots\ldots (15):$$

l'axe des x divise donc la courbe en deux parties symétriques : le sommet est le point d'intersection de cet axe avec la courbe. Pour ce sommet on a $y = o$, et la valeur correspondante de X, étant, d'après (15),

$$X = \frac{r^2 \gamma^2 - \alpha^2 z'^2}{2(\alpha m z'^2 - r^2 \gamma n)},$$

si l'on prend NA $=$ X (fig. 174), on aura

$$NP = NA + AP,$$

ou

$$x = X + x_1 = x_1 + \frac{r^2\gamma^2 - \alpha^2 z'^2}{2(\alpha m z'^2 - r^2\gamma n)},$$

dont la substitution dans (15) donne

$$z'^2 y^2 + 2(\alpha m z'^2 - \gamma n r^2)\, x_1 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$y^2 - 2px_1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad y^2 - 2px = 0 \ldots\ldots (16),$$

en posant $\frac{\gamma n r^2 - \alpha m z'^2}{z'^2} = p$, et changeant x_1 en x : alors le nouvel axe des y passe par le point A où il touche la courbe.

Si l'on suppose l'angle au centre du cône, $= 100^d$, ce qui est une particularité de plus, on a ces conséquences,

$$r = z', \quad n = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

et si l'origine N est sur un point de l'arête SD, on a de plus $\alpha = \gamma$, ensorte que $p = \alpha\sqrt{2}$, et l'équation de la parabole devient

$$y^2 = 2\alpha x\sqrt{2} \ldots\ldots (17).$$

Pour l'ellipse et l'hyperbole, les caractéristiques se réduisent à $-4AC < 0$, $-4AC > 0$ pour $x' = 0$, $y' = 0$: or à cause de A positif, il faut qu'on ait pour l'ellipse

$$C = -r^2n^2 + m^2z'^2 > 0,$$

et pour l'hyperbole,

$$C = -r^2n^2 + m^2z'^2 < 0.$$

Ne considérons d'abord que la première de ces deux courbes, qui est toute entière sur l'une des deux surfaces coniques opposée par le sommet. D'abord l'équation (14) indique qu'à

chaque abscisse correspondent deux ordonnées égales et de différens signes : l'axe NX est donc symétrique dans la courbe, et les points A et A′ dans lesquels cet axe est rencontré par la courbe, en sont les sommets : l'équation (14) donne pour abscisses correspondantes,

$$X = \frac{(r^2\gamma n - \alpha m z'^2) \pm (\alpha n - \gamma m) r z'}{-r^2 n^2 + m^2 z'^2}.$$

Pour construire ces intersections, nous porterons de N en C la longueur (fig. 475)

$$NC = \frac{r^2\gamma n - \alpha m z'^2}{-r^2 n^2 + m^2 z'^2};$$

puis de C en A et de C en A′, les longueurs

$$CA = + \frac{(\alpha n - \gamma m) r z'}{m^2 z'^2 - r^2 n^2} = + A,$$

$$CA' = - \frac{(\alpha n - \gamma m) r z'}{m^2 z'^2 - r^2 n^2} = - A;$$

le point C sera le centre de la courbe, et on voit que la parabole n'admet pas de centre.

Pour transporter l'origine de N en C, il faudra établir entre les abscisses $NP = x$, $CP = x_1$, la relation

$$x = x_1 + CN,$$

et remplacer x par cette valeur dans (14) ; mais pour abréger le calcul, nous poserons

$$r^2\gamma n - \alpha m z'^2 = N, \quad - r^2 n^2 + m^2 z'^2 = D,$$

ensorte que le résultat de la substitution sera

$$z'^2 y^2 + D\left\{x_1^2 + \frac{2N}{D} x_1 + \frac{N^2}{D^2}\right\} - 2N\left(x_1 + \frac{N}{D}\right)$$
$$+ \alpha^2 z'^2 - r^2 \gamma^2 = 0,$$

lequel, après avoir effectué les opérations et changé x_1 en x,

deviendra

$$z'^2y^2+\{m^2z'^2-r^2n^2\}\,x^2-\frac{(\alpha n-\gamma m)^2r^2z'^2}{m^2z'^2-r^2n^2}=0\ldots\ldots.(18),$$

équation de l'ellipse au centre.

L'équation de la courbe rapportée au sommet A comme origine des coordonnées, sera

$$z'^2y^2+\{m^2z'^2-r^2n^2\}\,x^2-2\,(\alpha n-\gamma m)\,rz'x\ldots\ldots(19).$$

Nous avons déjà trouvé l'expression de CA que nous nommerons A : pour avoir CB, on fera $x=0$ dans (18), ce qui donnera

$$CB=B=\frac{(\alpha n-\gamma m)\,r}{\sqrt{m^2z'^2-r^2n^2}}.$$

De ces expressions de A et B, on déduit

$$\frac{B^2}{A^2}=\frac{m^2z'^2-r^2n^2}{z'^2},$$

$$B^2=\frac{(\alpha n-\gamma m)^2r^2}{m^2z'^2-r^2n^2},$$

$$\frac{B^2}{A}=\frac{(\alpha n-\gamma m)\,r}{z'}:$$

ensorte que l'équation (18), divisée par z'^2, devient par le fait de ces substitutions,

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2\ldots\ldots.(20),$$

et l'équation (19), divisée par z'^2, se change dans la suivante,

$$A^2y^2+B^2x^2=2AB^2x\ldots\ldots(21).$$

Si l'on suppose l'angle au centre du cône, $=100^d$, on a $r=z'$, et après la division par z'^2, les équations (18) et (19) deviennent

$$y^2+(m^2-n^2)\,x^2-\frac{(\alpha n-\gamma m)^2}{m^2-n^2}=0\ldots\ldots.(22),$$

$$y^2+(m^2-n^2)\,x^2-2\,(\alpha n-\gamma m)\,x=0\ldots\ldots(23):$$

si de plus on fait $\theta = 200^d$, auquel cas $n = 0$, $m = -1$, $A = \gamma$, l'équation (22) donne

$$y^2 + x^2 - \gamma^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 = A^2,$$

équation d'un cercle rapporté au centre, et dont le rayon est A. Enfin si $\theta = 0$, $\gamma = 0$, l'équation (22) devient

$$y^2 + x^2 = 0,$$

et l'ellipse dégénère en un point qui est le sommet du cône.

Pour l'hyperbole, les deux branches se trouvent sur les surfaces coniques opposées. On portera encore les longueurs NC, CA, CA', déduites de l'équation (14), de N en C et de C en A et A' (fig. 176). Pour transporter l'origine de N en C, il faudra encore faire dans (14),

$$x = NC + x_1,$$

substitution qui ramènera à l'équation (18) : et pour transporter l'origine du centre au sommet A, on posera dans celle-ci

$$x = CA + x_1,$$

et on sera conduit à la transformée

$$z'^2 y^2 + (m^2 z'^2 - r^2 n^2) x^2 + 2(\alpha n - \gamma m) r z' x \ldots\ldots (24);$$

mais la valeur de y correspondante à $x = 0$, laquelle était réelle dans l'ellipse rapportée au centre, devient imaginaire pour l'hyperbole caractérisée par

$$m^2 z'^2 - r^2 n^2 < 0.$$

Ici nous prendrons pour B, non plus l'ordonnée correspondante à $x = 0$, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, mais seulement le facteur réel dans cette ordonnée, savoir,

$$B = \frac{(\alpha n - \gamma m) r}{\sqrt{r^2 n^2 - m^2 z'^2}};$$

alors on a

$$\frac{B^2}{A^2} = -\frac{m^2 z'^2 - r^2 n^2}{z'^2}, \quad B^2 = \frac{(\alpha n - \gamma m)^2 r^2}{r^2 n^2 - m^2 z'^2}, \quad \frac{B^2}{A} = -\frac{(\alpha n - \gamma m) r}{z'};$$

ces substitutions faites dans les équations (18) et (24), les réduisent à

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 \ldots\ldots (25),$$
$$A^2y^2 - B^2x^2 = 2AB^2x,$$

et si l'on compte les abscisses positives de A vers A′, c'est-à-dire, dans le même sens que celles de l'ellipse, cette dernière équation devient, en changeant x en $-x$,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -2AB^2x \ldots\ldots (26).$$

Pour l'angle au centre $= 100^d$ et $\theta = 100^d$, auquel cas $r = z'$, $n = 1$, $m = 0$, $\alpha = A = B$, l'équation (25) se change dans celle-ci

$$y^2 - x^2 + A^2 = 0,$$

et alors l'hyperbole est dite équilatère. Pour $\alpha = 0$, la courbe dégénère en deux droites

$$y^2 - x^2 = 0.$$

CHAPITRE XX.

Du plan tangent aux surfaces du second degré.

236. Si l'on imagine un plan tangent à une surface courbe quelconque, et une suite de plans qui passent par le point de contact, et qui coupent la surface et le plan tangent, les sections faites sur la surface courbe, auront respectivement pour tangentes ces droites intersections du plan coupant et du plan tangent.

Réciproquement, si tant de droites qu'on voudra sont tangentes à une surface courbe, et ne forment qu'un seul et même contact, elles seront situées dans le plan tangent à cette surface, et elles détermineront ce plan, puisque chacune des courbes passant par le point de contact, ne comporte qu'une tangente.

Pour obtenir l'équation du plan tangent, il ne s'agit donc que d'exprimer algébriquement qu'une droite est assujétie à passer par un point d'une surface, et à lui être tangente dans toutes les positions. La méthode que nous allons exposer, et qui est analogue à celle dont on a fait usage (chap. IX), s'applique aux surfaces en général.

Nous représenterons par

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + M'z + N'y + P'x + K = 0 \ldots\ldots (1),$$

l'équation des surfaces du second degré, qui comprend en effet, celles qui ont un centre et celles qui en sont dépourvues. Si x', y', z' sont les coordonnées du point de contact, on aura

$$Mz'^2 + Ny'^2 + Px'^2 + M'z' + N'y' + P'x' + K = 0 \ldots (2),$$

Les équations des projections d'une droite menées à volonté par ce point, sont

$$x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z') \ldots\ldots (3),$$

et il s'agit d'assujétir cette droite à toucher la surface au point x', y', z', dans toutes ses positions. Pour transporter l'origine des coordonnées à ce même point, et rapporter ceux de la surface courbe à des coordonnées polaires (193), on fera dans (1),

$$x = \mathrm{R}\cos\theta\cos\varphi + x', \quad y = \mathrm{R}\cos\theta\sin\varphi + y', \quad z = \mathrm{R}\sin\theta + z',$$

ou, pour abréger,

$$x = \mathrm{R}pm + x', \qquad y = \mathrm{R}pn + y', \qquad z = \mathrm{R}q + z',$$

p étant $= \cos\theta$, $m = \cos\varphi$, $n = \sin\varphi$, $q = \sin\theta$: on aura pour résultat de ces substitutions,

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}(\mathrm{R}q + z')^2 + \mathrm{N}(\mathrm{R}pn + y')^2 + \mathrm{P}(\mathrm{R}pm + x')^2 \\ &+ \mathrm{M}'(\mathrm{R}q + z') + \mathrm{N}'(\mathrm{R}pn + y') + \mathrm{P}'(\mathrm{R}pm + x') = 0 : \end{aligned}$$

le développement de cette équation sera visiblement de la forme

$$\mu\mathrm{R}^2 + \nu\mathrm{R} + \xi = 0, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R}(\mu\mathrm{R} + \nu) + \xi :$$

or pour que la droite devienne tangente à la surface, il faut que les deux valeurs de R soient nulles, condition qui exige qu'on ait

$$\xi = 0, \qquad \nu = 0 :$$

mais $\xi = 0$ répète l'équation (2), et la quantité ν est la somme des coefficiens qui multiplient la première puissance de R : ensorte qu'on a cette unique condition

$$\nu = 2\mathrm{M}qz' + 2\mathrm{N}pny' + 2\mathrm{P}pmx' + \mathrm{M}'q + \mathrm{N}'pn + \mathrm{P}'pm = 0;$$

divisant par q, et faisant attention que (pag. 352)

$$\frac{pm}{q} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta} = a, \quad \frac{pn}{q} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta} = b,$$

il viendra

$$2Mz' + 2Nby' + 2Pax' + M' + N'b + P'a \ldots\ldots (4).$$

Cette équation étant la seule qui existe entre a et b, il s'ensuit que la position de la tangente, est absolument arbitraire : éliminant a et b au moyen des équations (3) qui donnent

$$a = \frac{x - x'}{z - z'}, \qquad b = \frac{y - y'}{z - z'}:$$

on trouvera, en réduisant à l'aide de la relation (2),

$$\begin{aligned}(2Mz' + M')\,z + (2Ny' + N')\,y + (2Px' + P')\,x \\ + M'z' + N'y' + P'x' + 2K = 0 \ldots\ldots (5),\end{aligned}$$

où x, y, z sont les coordonnées de la tangente au point x', y', z' dans toutes ses positions : cette équation est d'ailleurs celle d'un plan, et conséquemment, celle du plan tangent.

Lorsqu'on se propose de mener un plan tangent à une surface courbe par un point extérieur x'', y'', z'', l'équation (5) qui ne change pas de forme, devient

$$\begin{aligned}(2Mz' + M')\,z'' + (2Ny' + N')\,y'' + (2Px' + P')\,x'' \\ + M'z' + N'y' + P'x' + 2K = 0 \ldots\ldots (6),\end{aligned}$$

x', y', z' étant les coordonnées du point inconnu de contact : en éliminant successivement deux des trois inconnues, x' et y', par exemple, entre cette équation et celle de la surface, on arrive aux équations des projections des courbes de contact sur les plans (yz), (xz). Il est à propos de remarquer qu'une droite qui passerait constamment par le point donné x'', y'', z'', et qui, dans son mouvement, ne cesserait de toucher la surface courbe, engendrerait un cône tangent à cette surface suivant une courbe qui serait celle dont on vient d'obtenir les projections. Si le point donné

x'', y'', z'' était lumineux, la courbe précédente de contact séparerait la partie obscure de la partie éclairée.

237. La normale à une surface courbe étant la droite qui, passant par le point de contact x', y', z', est perpendiculaire au plan tangent, ou à toutes les tangentes en ce point, ses équations seront

$$x - x' = -\frac{1}{a}(z - z'),$$

$$y - y' = -\frac{1}{b}(z - z').$$

Pour l'ellipsoïde, par exemple, représenté (204) par

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1,$$

l'équation (5) du plan tangent devient

$$Lx'x + My'y + Nz'z = 1;$$

et comme les projections de la normale sur les plans (xz), (yz), sont perpendiculaires aux traces du plan tangent, sur ces mêmes plans de projection, on aura

$$\frac{1}{a} = -\frac{Lx'}{Nz'}, \quad \frac{1}{b} = -\frac{My'}{Nz'}:$$

ainsi les équations des projections de la normale deviennent

$$x - x' = \frac{Lx'}{Nz'}(z - z'), \qquad y - y' = \frac{My'}{Nz'}(z - z').$$

Pour $L = N$, auquel cas la surface est de révolution autour de l'axe des y (208), ces équations se changent dans celles-ci,

$$xz' = x'z, \quad y - y' = \frac{My'}{Nz'}(z - z').$$

Ainsi, en vertu de la première équation, la normale ren-

contre l'axe des y, ou celui de rotation, et c'est ce qui arrive pour toute surface de révolution. Pour la sphère, on aurait (207)

$$L = N = M,$$

et ces deux équations des projections de la normale

$$xz' = x'z, \quad yz' = y'z,$$

qui disent que cette ligne passe par le centre de la sphère.

238. Théorème I. *Si trois plans rectangulaires touchent constamment un même ellipsoïde, ou un même hyperboloïde, le sommet de l'angle trièdre qu'ils forment, est toujours sur la surface d'une sphère concentrique à cet ellipsoïde, et dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des trois demi-axes.*

L'équation des surfaces du second degré qui ont un centre, est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

et les trois demi-axes sont $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, $\sqrt{\frac{1}{C}}$: si donc x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' désignent les coordonnées des trois points de contact, on aura

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1 \\ Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 1 \\ Ax'''^2 + By'''^2 + Cz'''^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (1),$$

et les équations des trois plans tangens seront

$$\left.\begin{array}{l} Ax'x + By'y + Cz'z = 1 \\ Ax''x + By''z + Cz''z = 1 \\ Ax'''x + By'''y + Cz'''z = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Pour exprimer que ces plans sont rectangulaires entr'eux, on

écrira (chap. XVII, probl. IX) ces conditions

$$\left.\begin{array}{l} A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' = 0 \\ A^2x'x''' + B^2y'y''' + C^2z'z''' = 0 \\ A^2x''x''' + B^2y''y''' + C^2z''z''' = 0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(3):$$

or si l'on fait $Ax' = a$, $Ax'' = a'$, $Ax''' = a''$; $By' = b$, $By'' = b'$, $By''' = b''$; $Cz' = c$, $Cz'' = c'$, $Cz''' = C''$; les équations (1) et (3) deviendront

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{A} + \dfrac{b^2}{B} + \dfrac{c^2}{C} = 1 \\ \dfrac{a'^2}{A} + \dfrac{b'^2}{B} + \dfrac{c'^2}{C} = 1 \\ \dfrac{a''^2}{A} + \dfrac{b''^2}{B} + \dfrac{c''^2}{C} = 1 \end{array}\right\}\ldots\ldots(4),$$

$$\left.\begin{array}{l} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(5),$$

et si, pour abréger, on suppose

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = R'^2 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = R''^2 \end{array}\right\}\ldots\ldots(6),$$

on conclura (*) que les relations (5) et (6) donnent lieu à

(*) Les formules (1), (2), (3) trouvées (probl. II, chap. XVIII) supposent, comme on le sait, et comme on peut d'ailleurs le conclure des relations (17) et (18), (probl. III), dans le cas des axes x', y', z' rectangulaires, ces relations,

$$\left.\begin{array}{l} m^2 + n^2 + p^2 = 1 \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 = 1 \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 = 1 \end{array}\right\}\ldots\ldots(1),$$

$$\left.\begin{array}{l} mm' + nn' + pp' = 0 \\ mm'' + nn'' + pp'' = 0 \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' = 0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(2),$$

en posant $\cos\alpha = m$, $\cos\beta = n$, $\cos\gamma = p$; $\cos\alpha' = m'$, $\cos\beta' = n'$, $\cos\gamma' = p'$; $\cos\alpha'' = m''$, $\cos\beta'' = n''$, $\cos\gamma'' = p''$: par la même raison,

celles-ci

$$\left.\begin{array}{l}\frac{ab}{R^2}+\frac{a'b'}{R'^2}+\frac{a''b''}{R''^2}=0\\ \frac{ac}{R^2}+\frac{a'c'}{R'^2}+\frac{a''c''}{R''^2}=0\\ \frac{bc}{R^2}+\frac{b'c'}{R'^2}+\frac{b''c''}{R''^2}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(7).$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^2}{R^2}+\frac{a'^2}{R'^2}+\frac{a''^2}{R''^2}=1\\ \frac{b^2}{R^2}+\frac{b'^2}{R'^2}+\frac{b''^2}{R''^2}=1\\ \frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R'^2}+\frac{c''^2}{R''^2}=1\end{array}\right\}\ldots\ldots(8).$$

Maintenant il est aisé d'obtenir une équation unique entre

---

les formules réciproques (7), (8) et (9) supposent les relations

$$\left.\begin{array}{r}m^2+m'^2+m''^2=1\\ n^2+n'^2+n''^2=1\\ p^2+p'^2+p''^2=1\end{array}\right\}\ldots\ldots(3),$$

$$\left.\begin{array}{r}mn+m'n'+m''n''=0\\ mp+m'p'+m''p''=0\\ np+n'p'+n''p''=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(4),$$

qui, conséquemment, ont lieu en même temps que les précédentes; mais les équations (6) et (5) reviennent à celles-ci,

$$\frac{a^2}{R^2}+\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=1,$$

$$\frac{a'^2}{R'^2}+\frac{b'^2}{R'^2}+\frac{c'^2}{R'^2}=1,$$

$$\frac{a''^2}{R''^2}+\frac{b''^2}{R''^2}+\frac{c''^2}{R''^2}=1;$$

$$\frac{aa'}{RR'}+\frac{bb'}{RR'}+\frac{cc'}{RR'}=0,$$

$$\frac{aa''}{RR''}+\frac{bb''}{RR''}+\frac{cc''}{RR''}=0,$$

$$\frac{a'a''}{R'R''}+\frac{b'b''}{R'R''}+\frac{c'c''}{R'R''}=0,$$

x, y, z, et indépendante des coordonnées des points de contact : en effet, élevant au carré les équations (2) des plans tangens, après avoir divisé la première par R, la seconde par R′, la troisième par R″, et ajoutant ensuite ces carrés, on aura, en vertu des équations (7) et (8),

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2};$$

ajoutant de même les équations (4), après avoir divisé la première par R^2, la seconde par R'^2, la troisième par R''^2, on aura, en tenant compte des équations (8),

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2};$$

donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}.$$

---

et elles sont identiques avec les équations (2) sous les hypothèses

$$m = \frac{a}{R}, \qquad n = \frac{b}{R}; \qquad p = \frac{c}{R},$$

$$m' = \frac{a'}{R'}, \qquad n' = \frac{b'}{R'}, \qquad p' = \frac{c'}{R'},$$

$$m'' = \frac{a''}{R''}, \qquad n'' = \frac{b''}{R''}, \qquad p'' = \frac{c''}{R''},$$

donc on en peut conclure

$$\frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} = 1,$$

$$\frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} = 1,$$

$$\frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2} = 1;$$

$$\frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} + \frac{a''b''}{R''^2} \quad ,$$

$$\frac{ac}{R^2} + \frac{a'c'}{R'^2} + \frac{a''c''}{R''^2} = 0,$$

$$\frac{bc}{R^2} + \frac{b'c'}{R'^2} + \frac{b''c''}{R''^2} = 0,$$

C'est ainsi que M. *Poisson* a démontré ce théorème dû à M. *Monge*, dans le n° 7 de la *Correspondance sur l'École Polytechnique.*

239. Théorème II. *Lorsqu'une surface conique est circonscrite à une surface du second ordre, la ligne de contact de ces deux surfaces, est une courbe plane.*

Une surface (S) du second ordre étant donnée, on peut toujours assigner une infinité de systèmes d'axes, soit rectangulaires, soit obliques, tels que la surface y étant rapportée, son équation prenne la forme

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + M'z + N'y + P'x = 0 \ldots\ldots (1).$$

Si par un point x', y', z', pris sur cette surface, on lui mène un plan tangent (T), l'équation de ce plan sera (236)

$$\begin{aligned}(2Px' + P')\,x + (2Ny' + N')\,y + (2Mz' + M')\,z \\ + P'x' + N'y' + M'z' = 0 \ldots\ldots (3).\end{aligned}$$

Supposons, en second lieu, que l'on propose de mener à la surface (S), un plan tangent par un point extérieur P ayant α, β, γ pour ses coordonnées : on changera dans (3) x, y, z en α, β, γ, pour dire que le point P est sur le plan tangent (T), et on aura

$$\begin{aligned}(2Px' + P')\,\alpha + (2Ny' + N')\,\beta + (2Mz' + M')\,\gamma \\ + P'x' + N'y' + M'z' = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(2P\alpha + P')\,x' + (2N\beta + N')\,y' + (2M\gamma + M')\,z' \\ + P'\alpha + N'\beta + M'\gamma = 0 \ldots\ldots (4),\end{aligned}$$

x', y', z' étant des coordonnées inconnues. On n'aura donc entre les trois coordonnées x', y', z' du point de contact, que les deux équations (4) et (1), en changeant dans celles-ci, x, y, z en x', y', z', équations auxquelles on pourra

substituer les équations (1) et

$$(2P\alpha + P')\,x + (2N\zeta + N')\,y + (2M\gamma + M')\,z + P'\alpha + N'\zeta + M'\gamma = 0 \ldots\ldots (5):$$

ce point x, y, z restera donc indéterminé, c'est-à-dire, qu'il y aura une infinité de points de contact, et conséquemment une infinité de plans tangens; ce qui est d'ailleurs évident. Or ces points de contact étant donnés par l'ensemble des équations (1) et (5), nécessairement le plan (5) sera le lieu des points de contact, et conséquemment il coupera la surface suivant ces points. Nous avons motivé cette conclusion (83).

Concevons maintenant une surface conique circonscrite à (S) et ayant le point P pour sommet : tous les plans tangens à (S), menés par P, seront aussi tangens à cette surface conique; les points de contact de la surface conique avec (S), seront donc les mêmes que ceux de (S) avec les plans tangens par P; ces points seront déterminés par l'intersection de (S) avec le plan (5). Donc, etc.

Réciproquement, tout plan coupant une surface du second degré, détermine sur elle la ligne de contact de cette surface avec une surface conique circonscrite : pour assigner le sommet de cette surface conique, il ne s'agit que d'exprimer que le plan est identique avec celui de l'équation (5), condition qui déterminera les trois coordonnées α, ζ, γ.

240. Théorème III. 1°. *Si par un point pris arbitrairement dans l'espace, on conduit à une surface du second degré, une suite de plans sécans, et si l'on considère leurs intersections avec cette surface comme les lignes de contact d'une suite de surfaces coniques circonscrites, les sommets de ces surfaces coniques seront tous situés sur un même plan;* 2°. *si l'on circonscrit à une surface du second degré, une suite de surfaces coniques dont les sommets soient sur un même plan, situé d'une manière quelconque dans l'espace, les*

plans des lignes de contact de ces surfaces coniques avec la surface proposée, passeront tous par un même point.

Soient g, h, k les coordonnées du point G de l'espace par lequel doivent passer les plans sécans; l'équation (5) aura lieu en changeant x, y, z en g, h, k, et elle deviendra

$$\begin{aligned}(2P\alpha + P')g + (2N\beta + N')h + (2M\gamma + M')k \\ + P'\alpha + N'\beta + M'\gamma = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}(2Pg + P')\alpha + (2Nh + N')\beta + (2Mk + M')\gamma \\ + P'g + N'h + M'k = 0:\end{aligned}$$

cette équation exprimant une relation constante et du premier degré entre les coordonnées α, β, γ du point P, en y changeant α, β, γ en x, y, z, deviendra celle du lieu de tous les points P qui répondent aux diverses positions que peut prendre le plan (T) autour du point G; l'équation de ce lieu sera donc

$$\begin{aligned}(2Pg + P')x + (2Nh + N')y + (2Mk + M')z \\ + P'g + N'h + M'k = 0 \ldots\ldots (6);\end{aligned}$$

de là résulte le théorème 1°.

2°. Si au lieu d'assujétir le plan (5) à passer seulement par un point G, on l'assujétissait à passer par une certaine droite (M); en désignant par G et G′ deux points de cette droite, et supposant que leurs coordonnées sont g, h, k et g', h', k', le point P se trouverait assujéti à être à la fois sur le plan (6) et sur un autre plan dont on obtiendrait l'équation en changeant dans (5), g, h, k en g', h', k': ce point P se trouverait donc dans l'intersection des deux plans (6) et (6′), c'est-à-dire, qu'il se trouverait sur leur intersection (N), laquelle serait une ligne droite.

De même que le point G étant pris arbitrairement, on peut toujours assigner un plan (6) qui ait avec lui la relation énoncée dans le théorème précédent, il n'est réciproquement

aucun plan (6) dans l'espace, auquel il ne réponde un certain point G lié par une semblable relation : on voit même que, pour obtenir ce point, il ne s'agit que de considérer comme inconnues, dans l'équation (6), les coordonnées g, h et k du point G, et de les déterminer en exprimant que cette équation est identique avec celle du plan donné.

A cause de la relation qui existe entre le point G et le plan (6), ce point a été appelé le *pôle* de ce plan, et on peut appeler le plan (6), *le polaire* du point G.

Il est aisé de voir que si les sommets des surfaces coniques circonscrites, étaient assujétis à se trouver sur une droite, ils se trouveraient, par cela seul, assujétis à être à la fois sur deux plans menés arbitrairement par cette droite ; qu'ainsi les plans des lignes de contact, se trouveraient assujétis à passer tous par deux points fixes, c'est-à-dire, par une droite joignant ces deux points.

La droite M qui doit contenir les sommets des surfaces coniques circonscrites, étant donnée, si on exprime qu'elle est identique avec celle qui est donnée par les deux plans (6) et (6′), on obtiendra quatre équations de relation entre les six coordonnées g, h, k ; g', h', k' ; prenant donc arbitrairement k et k', elles se trouveront toutes déterminées, et on aura ainsi les deux points de la droite N par laquelle passent les plans de toutes les lignes de contact.

On trouvera dans les *Annales Mathématiques*, tom. III, n° X, d'autres propriétés curieuses, déduites de cette analyse.

CHAPITRE XXI.

Étant donnée d'espèce et de position dans l'espace, une surface du premier ou du second ordre, placée comme on voudra par rapport aux plans coordonnés, établir l'équation numérique de cette surface, relativement à sa situation actuelle.

241. Nous avons résolu (chap. VI) la question analogue pour les courbes planes du premier ordre.

1°. Pour le plan : l'équation de cette surface est

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

si l'on a un plan qui coupe les axes des x, y, z à des distances de l'origine, indiquées par les nombres 3, 2 et 5, on aura ces déterminations

$$-\frac{D}{A} = 3, \quad -\frac{D}{B} = 2, \quad -\frac{D}{C} = 5;$$

d'où l'on tire ces relations,

$$3A = 2B = 5C = -D;$$

faisant, par exemple, $D = 1$, on aura

$$A = -\tfrac{1}{3}, \quad B = -\tfrac{1}{2}, \quad C = -\tfrac{1}{5};$$

ce qui donnera

$$10x + 15y + 6z - 30 = 0$$

pour l'équation du plan.

2°. L'équation générale des surfaces du second ordre est

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+L=0;$$

résolue par rapport à z, elle donne

$$z=-\left\{\frac{Ey+Fx+I}{2C}\right\}$$

$$\pm\sqrt{\left[\frac{E^2-4BC}{4C^2}\left\{y^2+\frac{2(EF-2CD)}{E^2-4BC}xy+\frac{F^2-4AC}{E^2-4BC}x^2\right.\right.}$$
$$\sqrt{\left.\left.+\frac{2(EI-2CH)}{E^2-4BC}y+\frac{2(FI-2CG)}{E^2-4BC}x+\frac{I^2-4CL}{E^2-4BC}\right\}\right]};$$

le plan diamètre de cette surface, a pour équation

$$z=-\frac{Ey+Fx+I}{2C},$$

et ce plan coupe la surface suivant une courbe dont la projection sur le plan des (xy), par exemple, est celle de toute la surface sur le même plan, en même temps qu'elle est la base du cylindre tangent qui limite cette surface; on obtiendra l'équation de cette projection, en égalant à zéro le polynome en x, y sous le radical; en effet, ce radical représentant ce dont il faut augmenter ou diminuer le z d'un point du plan diamétral, pour avoir le z des points correspondans de la surface, l'égalité à zéro du radical n'exprime plus que les points du contour de la section, mais indépendamment de la hauteur de ces points au-dessus du plan (xy), et conséquemment cette relation en x et y énonce la projection horizontale du contour de la section.

Passons à des exemples.

1°. Soit $aLa'L'$ (fig. 177) la projection sur le plan des (xy) d'un ellipsoïde, disposé de manière que son plan diamétral soit parallèle au plan des (xy), et élevé au-dessus de ce plan d'une quantité $=4$: soient de plus

$$AB=2,\quad AB'=4,\quad Ba=1,\quad CL=CL'=1:$$

et supposons que le diamètre $aC'a'$ passe par l'origine, l'ellipse $aLa'L'$ aura pour équation (chap. VI)

$$y^2 - xy + \tfrac{5}{4}x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Le plan diamètre de la surface, parallèle au plan des (xy), aura pour équation

$$z = 4;$$

ensorte que l'équation de la surface sera de la forme

$$z = 4 \pm \sqrt{\left\{\frac{E^2 - 4BC}{4C^2}\left[y^2 - xy + \tfrac{5}{4}x^2 - 6x + 8\right]\right\}},$$

en observant que la section par le plan diamètre $z = 4$, est égale à la projection horizontale de l'ellipsoïde : il ne reste donc plus qu'à déterminer le facteur $\frac{E^2 - 4BC}{4C^2}$. Or les coordonnées x, y relatives au centre de l'ellipsoïde, sont ici

$$AC = AB + BC = 3, \qquad CC' = \frac{AC \times Ba}{AB} = \tfrac{3}{2};$$

faisant donc $x = 3$, $y = \frac{3}{2}$ dans le polynome en x et y sous le radical ci-dessus, la valeur du radical sera celle de l'ordonnée verticale de la surface passant par le centre, et en la supposant égale à l'unité, on aura

$$\sqrt{\frac{E^2 - 4BC}{4C^2} \times -1} = 1,$$

d'où

$$\frac{E^2 - 4BC}{4C^2} = -1,$$

au moyen de quoi l'équation de la surface deviendra

$$z = 4 \pm \sqrt{-(y^2 - xy + \tfrac{5}{4}x^2 - 6x + 8)},$$

c'est-à-dire,

$$4z^2 - 4xy + 4y^2 + 5x^2 - 32z - 24x + 96 = 0.$$

équation cherchée que l'on vérifiera aisément par la discussion.

Supposons que la même projection appartienne à un ellipsoïde incliné sur les trois plans coordonnés, et tels que son plan diamètre, parallèle à l'axe des y, fasse avec le plan des (xy), un angle dont la tangente trigonométrique soit $\frac{1}{2}$, et coupe l'axe des z, au-dessus du plan (xy), à une hauteur égale à l'unité. L'équation générale du plan diamètre qui répond à ces données, sera

$$z = \frac{Ey + Fx + I}{2C}:$$

pour $x = 0$, $y = 0$, on a

$$z = \frac{I}{2C} = 1;$$

d'ailleurs $\frac{F}{2C} = \frac{1}{2}$ et $\frac{E}{2C} = 0$; donc

$$z = \tfrac{1}{2}x + 1;$$

ensorte que

$$z = +\tfrac{1}{2}x + 1 \mp \sqrt{\left\{\frac{E^2 - 4BC}{4C^2}\left[y^2 - xy + \tfrac{5}{4}x^2 - 6x + 8\right]\right\}}:$$

de plus, pour $x = 3$, $y = \frac{3}{2}$, l'ordonnée verticale z, comptée du centre de la surface, est $= 1$; donc

$$\sqrt{\frac{E^2 - 4BC}{4C^2} \times -1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{E^2 - 4BC}{4C^2} = -1:$$

ainsi l'équation cherchée sera

$$4z^2 + 4y^2 + 6x^2 - 4zx - 4xy - 8z - 20x + 36 = 0.$$

2°. Soit le point O (fig. 178) considéré comme le résultat de la construction d'un ellipsoïde situé au-dessous du plan (xy), et projeté sur ce plan au point O' : le plan diamètre passe par les points D, E, F donnés par $x = AD = 1$, $y = AE = 2$, $z = AF = 1$, et on a de plus,

$$AC = 2, \quad CO' = 3.$$

L'équation du plan diamètre donne pour $x=0$, $y=0$,

$$z=-\frac{I}{2C}=1\,;$$

pour $x=0$ et $z=0$, on en déduit

$$0=-\frac{Ey+I}{2C}=-\frac{2E}{2C}+1, \quad \text{d'où} \quad \frac{E}{2C}=\frac{1}{2};$$

enfin pour $y=0$ et $z=0$, on trouve

$$0=-\frac{F}{2C}+1, \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{2C}=1:$$

ainsi le plan diamètre est représenté par

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1.$$

L'équation de la projection O′ sera (chap. VI)

$$y^2-3xy+\tfrac{13}{4}x^2-4x+4=0,$$

de manière que celle de l'ellipsoïde, sera

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\pm\sqrt{\left\{\frac{E^2-4BC}{4C^2}\left[y^2-3xy+\tfrac{13}{4}x^2-4x+4\right]\right\}}.$$

Substituant dans le polynome en xy, sous le radical, pour x et y les valeurs $AC=2$, $CO'=3$, et observant que le radical est nul, parce que l'ellipsoïde est concentré en O′, il viendra

$$\frac{E^2-4BC}{4C^2}=\frac{0}{0},$$

résultat indéterminé qu'on pourra supposer, pour plus de simplicité, $=-1$, ensorte que

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\pm\sqrt{-(y^2-3xy+\tfrac{13}{4}x^2-4x+4)}\,;$$

d'où résulte

$$4z^2+4zy+8zx-8xy+5y^2+17x^2-8z-4y-24x+20=0,$$

équation cherchée.

On transportera l'origine au centre de la courbe par les substitutions

$$x = x' + m, \quad y = y' + n, \quad z = z' + p,$$

qui donneront

$$m = 2, \quad n = 3, \quad p = -\tfrac{5}{2},$$

et la transformée

$$4z'^2 + 5y'^2 + 17x'^2 + 4z'y' + 8z'x' - 8x'y' = 0.$$

Si l'on rapportait maintenant la courbe à ses axes principaux, on trouverait une équation formée de la somme de trois termes positifs, égale à zéro; ce qui annonce que la surface se réduit à son centre qui est l'origine des coordonnées.

3°. Soit (fig. 179) un hyperboloïde à deux nappes, projeté sur le plan (xy), et dont la projection soit telle qu'on ait

$$AB = 7, \quad AB' = 1, \quad AD = AO = 4, \quad OL = OL' = 4:$$

l'équation de la projection sera (chap. VI)

$$y^2 + 2xy + \tfrac{5}{9}x^2 - 8y - \tfrac{40}{9}x + \tfrac{116}{9} = 0.$$

Supposons que le plan diamètre qui est parallèle à l'axe des x, fasse avec le plan des (xy), un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$, qu'il coupe l'axe des z en un point $z = 1$ et l'axe négatif des y : l'équation du plan diamètre sera

$$z = -\tfrac{1}{2}y + 1,$$

et celle de la surface

$$z = -\tfrac{1}{2}y + 1$$
$$\pm\sqrt{\left\{\frac{E^2 - 4BC}{4C^2}\left[y^2 + 2xy + \tfrac{5}{9}x^2 - 8y - \tfrac{40}{9}y + \tfrac{116}{9}\right]\right\}}.$$

Faisant dans le polynome en xy, $x = AO = 4$, $y = 0$, et observant que la valeur correspondante du radical, suppo-

sée $=4$, doit être imaginaire, on aura

$$\sqrt{\frac{E^2-4BC}{4C^2}}\times 4 = 2\sqrt{-1}\,,\quad \text{d'où}\quad \frac{E^2-4BC}{C^2}=-1\,,$$

d'où on conclura pour l'équation cherchée,

$$36z^2+45y^2+20x^2+36yz+72xy-72z-324y-160x+500=0.$$

4°. Soient (fig. 180) les deux droites OS, OR, considérées comme les traces sur le plan (xy), d'un système de deux plans tangens à la surface d'un cône dont le sommet est en O, plans projetans de la surface, et supposons que ces droites soient déterminées de position par $AD=3$, $AE=6$, $AC=\frac{3}{2}$, $CO=3$: les droites OS et OR auront donc respectivement pour équations

$$y+2x-6=0,\quad y-2x=0,$$

dont le produit sera

$$y^2-4x^2-6y+12x=0,$$

équation de la projection de la surface conique, puisqu'elle exprime, indépendamment de z, le système des deux arêtes de contact, limites de la surface dans le plan (xy). Si, suivant d'autres données, le plan diamètre a pour équation

$$z=4y+6x,$$

l'équation de la surface conique sera de la forme

$$z=4y+6x\pm\sqrt{\left[\frac{E^2-4BC}{4C^2}(y^2-4x^2-6y+12x)\right]}.$$

Substituant sous le radical, les valeurs de $x=AC=\frac{3}{2}$, $y=CO=3$, et égalant ce radical à zéro, puisque O est le sommet du cône situé dans le plan (xy), on aura

$$\frac{E^2-4BC}{4C^2}=\frac{0}{0};$$

faisant donc, pour plus de simplicité, ce coefficient $=-1$;

uvera pour l'équation cherchée,

$$8zy - 12zx + 48xy + 17y^2 + 32x^2 - 6y + 12x = 0.$$

Soit, en dernier lieu, NIN′ (fig. 181) la projection sur n (xy) d'un paraboloïde tellement situé que l'on ait 2, AE$=3$, AB$=5$; et soit le paramètre NN′$=4\sqrt{13}$, on déduira AC$=7$, CO$=\frac{15}{2}$: l'équation de la projecra

$$y^2 - 3xy + \tfrac{3}{4}x^2 + 6y - 35x + 139 = 0.$$

ons que le plan diamètre passant par l'axe des x, fasse plan (xy), du côté des y négatives, un angle dont la te trigonométrique soit $= \frac{1}{2}$: l'équation de ce plan sera

$$z = -\tfrac{1}{2}y,$$

du paraboloïde sera de la forme

$$\tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{\left[\frac{E^2-4BC}{C^2}(y^2-3xy+\tfrac{9}{4}x^2+6y-35x+139)\right]};$$

tant dans le polynome en xy, les valeurs de AC$=7$, $\frac{15}{2}$, et égalant le radical à $2\sqrt{13}$, valeur supposée du aramètre, on trouvera

$$\frac{E^2-4BC}{C^2} = -1,$$

donnera cette équation du paraboloïde,

$$5y^2 + 9x^2 + 4zy - 12xy + 24y - 140x + 556 = 0.$$

s laissons au lecteur le soin de varier davantage les s, et de les étendre à l'hyperboloïde à deux nappes, ans le sens des z; à l'hyperboloïde à une seule nappe; aboloïde hyperbolique, etc.

FIN.

ADDITIONS.

Nous ajouterons quelques questions à celles qui ont été traitées dans les quinze premiers chapitres de cet ouvrage ; mais ici nous nous bornerons à tracer la marche des solutions, sans entrer dans les détails de raisonnement et de calcul.

Problème I. *Un point* C (fig. 182) *étant donné dans l'angle droit* YAX, *faire passer par* C *une droite* CF *de manière que la partie* EF *interceptée dans l'angle droit* EAF, *soit égale à une longueur donnée* 2b.

Nous supposerons que le point C soit situé sur la droite qui divise également l'angle droit YAX, ensorte qu'on ait

$$CB = CD = a.$$

Supposant connue la position de la droite CF, nous prendrons pour inconnue la longueur $CG = x$, le point G étant le milieu de EF : ainsi on aura

$$EG = \frac{EF}{2} = b.$$

On trouve aisément

$$BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2} = \frac{a(x+b)}{x-b},$$

et, après les réductions,

$$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 - b^2(2a^2 - b^2) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Pour construire, on prendra

$$\overline{DK}^2 = a^2 + b^2, \quad DL = \sqrt{a^2 + (2b)^2},$$

et on aura

$$x = \pm \sqrt{\overline{DK}^2 \pm a.DL}.$$

Or $a.DL$ étant $\overline{PM}^2$, on aura à construire les racines

$$x = \pm \sqrt{\overline{DK}^2 \pm \overline{PM}^2}.$$

Si parmi ces racines, on considère celle-ci

$$x = + \sqrt{\overline{DK}^2 + \overline{PM}^2},$$

et qu'à cette ligne on ajoute b, on aura la longueur CF telle qu'en décrivant de C, comme centre, avec CF comme rayon, un arc, il coupera XX′ en F. Les deux racines

$$x = \pm \sqrt{\overline{DK}^2 - \overline{PM}^2},$$

sont imaginaires, en observant que $PM > DK$. La quatrième racine

$$x = - \sqrt{\overline{DK}^2 + \overline{PM}^2},$$

donne une seconde solution.

En prenant CE pour inconnue, faisant toujours $CD = a$, et posant $EF = b$, on a

$$BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2} = \frac{a(x+b)}{x},$$

et, après les réductions,

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^4 + a^2b^2;$$

le premier membre est un carré parfait, et, après l'extraction de la racine carrée, on trouve

$$x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2},$$

d'où

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{a^2 + b^2}}}{2},$$

racines que nous laissons à examiner et à construire. Si l'on n'eût pas supposé le point C à distances égales des axes, on serait parvenu à des équations du quatrième degré, difficile à résoudre.

Problème II. *Un triangle étant donné, trouver la suite des points d'intersection de deux droites menées par les extrémités de la base, et assujéties à couper les deux autres côtés en un même nombre de parties proportionnelles* (fig. 183).

Les équations des droites

$$
\begin{aligned}
&\text{AB sont} && y = \frac{y'}{x'}\,x,\\
&\text{CR}\ldots\ldots && y = a(x - x'),\\
&\text{BC}\ldots\ldots && y = \frac{y'}{x'-x''}(x - x''),\\
&\text{AR}'\ldots\ldots && y = a'x,
\end{aligned}
$$

x' et y' étant les coordonnées du point A ; et x'' étant AC. On cherchera l'ordonnée du point R d'intersection des droites AB et CR, puis l'ordonnée du point R′ d'intersection des droites CB et AR′ ; on égalera ces deux ordonnées fonctions de a et a', et par là on dira que la droite RR′ est parallèle à la base AC du triangle, ou, en d'autres termes, que les droites BR′, CR coupent proportionnellement les côtés du triangle : à l'effet de rendre l'équation indépendante de a et a', on remplacera a et a' par leurs valeurs tirées des équations des droites CR et AR′, ce qui donnera une relation entre les coordonnées de l'intersection de ces droites dans toutes leurs positions, et sous la condition que leurs points de rencontre avec AB et CB, soient toujours sur une parallèle à AC. On parviendra ainsi au résultat

$$y[yx' - yx'' + yx' - y'x + y'y'' - y'x] = 0,$$

d'où

$$y = 0, \quad y = \frac{2y'x}{2x' - x''} - \frac{y'x''}{2x' - x''};$$

cette dernière équation est celle d'une droite passant par le sommet et le milieu de la base.

Problème III. *Étant données une ellipse et une droite perpendiculaire au grand axe, si par tous les points de cette droite, on mène deux tangentes à la courbe, les cordes qui joindront les points de contact d'un même couple de tangentes, se couperont toutes en un même point du grand axe.*

Nous désignerons par x' et y' les coordonnées du point supérieur de contact, et par x'', y'' celles du point inférieur; α étant l'équation de la perpendiculaire, et β l'ordonnée du point de départ des tangentes d'un même couple, on évaluera x' et y', x'' et y'' au moyen des équations

$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2, \qquad A^2\beta y'+B^2\alpha x'=A^2B^2,$$

et on trouvera

$$x'=\frac{A^2B^2\alpha+A^2\beta M}{N}, \qquad x''=\frac{A^2B^2\alpha-A^2\beta M}{N},$$

$$y'=\frac{A^2B^2\beta+B^2\alpha M}{N}, \qquad y''=\frac{-A^2B^2\beta+B^2\alpha M}{N},$$

en observant que

$$M=\sqrt{B^2\alpha^2+A^2\beta^2-A^2B^2}, \qquad N=A^2\beta^2+B^2\alpha^2;$$

et que y'' doit être prise négativement, comme étant l'ordonnée du point de contact inférieur. La droite menée par les points x' et y', x'' et y'' coupe l'axe des x en un point

$$x=\frac{x''y'-y''x'}{y'-y''},$$

remplaçant x', x'', y', y'' par leurs valeurs, et réduisant, on trouve

$$x'=\frac{A^2}{\alpha},$$

valeur indépendant de β. Donc, etc.

On peut étendre ce calcul à la parabole, et supposer dans ces courbes, que le lieu des points de départ des tangentes conjuguées, soit une ligne située d'une manière quelconque par rapport aux axes de la courbe, ce qui rentrera dans la question traitée (83).

Problème IV. *Étant donnés sur un plan plusieurs points par leurs coordonnées rectangles, faire passer une droite entre ces points, de manière que la somme des perpendiculaires menées des points situés d'un même côté par rapport à la droite, soit égale à la somme des perpendiculaires menées des points situés de l'autre côté de la même droite.*

L'équation de la droite cherchée, est

$$y-\tfrac{1}{3}(y'+y''+y'''+\text{etc.})=a[x-\tfrac{1}{3}(x'+x''+x'''+\text{etc.})],$$

y' et x', y'' et x'', y''' et x''', etc. étant les coordonnées des points donnés. On peut rapprocher ce problème du problème III résolu (chap. X).

Problème. V. *Un angle étant donné, trouver dans l'intérieur de cet angle un point duquel abaissant des perpendiculaires sur les côtés de l'angle, elles soient dans le rapport de* m *à* n.

Le sommet de l'angle étant pris pour origine, et l'un de ses côtés pour axe des abscisses, on doit avoir (fig. 184)

$$M'M : M'P' \text{ ou } y' :: m : n :$$

or

$$M'M = \frac{y'-ax'}{\sqrt{1+a^2}},$$

en observant que $b=0$; mais le point étant dans l'intérieur de l'angle, on a $y'<ax'$, et

$$M'M = \frac{ax'-y'}{\sqrt{1+a^2}},$$

donc

$$y' = \frac{nax'}{n+m\sqrt{1+a^2}}.$$

En supposant le point hors de l'angle, on trouve

$$y' = \frac{nax'}{n - m\sqrt{1+a^2}}.$$

Problème VI. *Étant donnés sur un plan un cercle* CETT' *et une droite* AX (fig. 185), *trouver le lieu des centres de tous les cercles tangens en même temps à la droite et au cercle.*

Du centre C du cercle, j'abaisse la perpendiculaire CA sur la droite; je prends le point A pour origine; je pose CA $= b$, et je désigne par x et y les coordonnées du centre C' du cercle tangent à la droite et au cercle donné dont le rayon $= r$. On a

$$\overline{CC'}^2 = (b - y^2)^2 + x^2 = (r+y)^2;$$

d'où l'on déduit

$$x^2 - 2(b+r)\,y + b^2 - r^2 = 0,$$

équation à la parabole dont le sommet est en S sur l'axe des ordonnées; à une distance $y = \frac{b-r}{2}$: rapportée à ce point, la courbe a pour équation

$$x^2 = 2(b+r)\,y:$$

son foyer est le centre du cercle donné, et la directrice est Q'Q.

Le plus petit des cercles qui satisfont à la question, est le cercle décrit du point S avec SA pour rayon. On peut supposer que la droite donnée passe par le centre du cercle donné.

Problème VII. *Deux cercles étant donnés de position sur un plan, trouver le lieu des centres des cercles tangens à ces deux cercles.*

A et A' étant (fig. 186) les centres des cercles donnés, nous prendrons l'axe des abscisses suivant AA', et le point A pour origine : soient r et r' les rayons des cercles donnés, x et y les coordonnées d'un point M tel que si de ce point avec ME,

comme rayon, on décrit un cercle, il sera, en même temps, tangent au petit cercle ; soient encore $\mathrm{ME}=z$, $\mathrm{AA}'=a$: on a

$$\overline{\mathrm{AM}}^2=\overline{\mathrm{MP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2,\quad \overline{\mathrm{A'M}}^2=\overline{\mathrm{MP}}^2+\overline{\mathrm{A'P}}^2,$$

c'est-à-dire,

$$(z-r)^2=y^2+x^2,\quad (z-r')^2=y^2+(a-x)^2;$$

éliminant z entre ces équations, nous aurons

$$4(r-r')^2y^2+4[(r-r')^2-a^2]x^2$$
$$-4a[(r-r')^2-a^2]x-[(r-r')^2-a^2]^2,$$

équation à l'hyperbole, à cause de $a>r+r'$, d'où $a>r-r'$. Les coordonnées du centre, sont $y=0$, $x=\frac{a}{2}$; $r-r'$ est l'axe réel, le demi-second axe est $\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{(r-r')^2}{4}}$, et l'équation de l'hyperbole devient

$$\frac{(r-r')^2}{(r-r')^2-a^2}y^2+x^2=\frac{(r-r')^2}{4};$$

d'ailleurs comme

$$c^2=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=\frac{a^2}{4},$$

les foyers sont les centres des cercles donnés. L'une des branches de l'hyperbole, est le lieu des centres des cercles tangens enveloppans ; l'autre est le lieu des centres des cercles intérieurs. On observera que

$$\mathrm{AM}=z-r,\quad \mathrm{A'M}=z-r',\quad \text{d'où}\quad \mathrm{A'M}-\mathrm{AM}=r-r'.$$

On discutera les cas où les deux cercles sont égaux et celui de $r+r'=a$.

Problème VIII. *Inscrire une ellipse dans un triangle, de manière que l'un de ses diamètres soit situé sur la ligne qui passe par le sommet et par le milieu de la base du triangle.*

Soient TGH (fig. 187) le triangle proposé, $\mathrm{AT}=n$ la ligne qui divise la base en deux parties, $\mathrm{AG}=\mathrm{AH}=m$, $\mathrm{AA}'=2\mathrm{A}'$, CC'

$=2B'$, $2A'$ et $2B'$ étant les diamètres conjugués : on sait que toute tangente à l'extrémité d'un diamètre, est parallèle au conjugué ; donc GH est parallèle à CC', et réciproquement : les deux côtés TG, TH étant tangens à la courbe, et le point T étant sur le diamètre AA', la ligne MM' qui joint les points de contact, sera parallèle à CC' (83, ou *Addit.*, probl. III). On a pour équation de la courbe

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

et, en même temps,

$$A'^2y'^2 + B'^2x'^2 = A'^2B'^2 \ldots\ldots (1),$$

x', y' étant les coordonnées des points de contact M et M'. Pour dire que le point M est sur la droite TH, on fera la proportion

$$AH : PM :: TA : TP;$$

d'où

$$y' = \frac{m}{n}(n - A' - x') \ldots\ldots (2),$$

équation qui exprime en même temps que le point M' est sur le côté TG. Il reste à exprimer que les côtés TG et TH sont tangens à la courbe en M et M' : à cet effet, on observera que la soutangente TP du point M, est

$$TP = \frac{A'^2 - x'^2}{x'};$$

d'ailleurs,

$$TP = n - A' - x';$$

donc

$$n - A' - x' = \frac{A'^2 - x'^2}{x'} \ldots\ldots (3) :$$

on n'a que trois équations et les quatre inconnues x', y', A' et B' à évaluer. Mais si l'ellipse doit toucher le côté TH en son milieu, on a de plus l'équation

$$y' = \frac{m}{2} \ldots\ldots (4).$$

Puisque $y' = \frac{m}{2}$, on a

$$x' = \frac{n}{2} - A',$$

valeurs qui, reportées dans les équations (1) et (3), les changent en celles-ci

$$A'^2m^2 + B'^2n^2 = 4A'B'^2n, \qquad n = 3A',$$

d'où

$$A' = \frac{n}{3}, \qquad B' = \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

Prenant donc sur AT une longueur $AO = \frac{n}{3}$, on a le centre de l'ellipse dont nous allons construire les axes principaux. On a trouvé (68)

$$2A = \sqrt{[A'^2+B'^2+2A'B'\sin\theta]} + \sqrt{[A'^2+B'^2-2A'B'\sin\theta]},$$
$$2B = \sqrt{[A'^2+B'^2+2A'B'\sin\theta]} + \sqrt{[A'^2+B'^2-2A'B'\sin\theta]},$$

θ étant l'angle entre les diamètres A' et B' : or si du point C', extrémité du conjugué de AA', on abaisse une perpendiculaire $C'p$ sur AA', et si l'on prend $C'R = A'$, on aura dans le triangle $C'RO$,

$$RO = \sqrt{\overline{C'R}^2 + \overline{C'O}^2 + 2C'R \times C'p};$$

et en observant que $C'p = B'\sin\theta$, on aura

$$RO = \sqrt{[A'^2 + B'^2 + 2A'B'\sin\theta]}.$$

Si l'on prolonge $C'p$ d'une quantité $C'R' = A'$, le triangle $C'OR'$ donnera

$$R'O = \sqrt{\overline{C'R'}^2 + \overline{C'O}^2 - 2C'R' \times C'p},$$

donc

$$R'O = \sqrt{[A'^2 + B'^2 - 2A'.B'\sin\theta]};$$

et conséquemment,

$$2A = RO + R'O, \qquad 2B = RO - R'O.$$

Il ne reste plus qu'à connaître l'inclinaison de l'un des axes sur le diamètre. A cet effet, on partira de ces relations

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$
$$\text{tang}\,(\alpha'-\alpha) = \text{tang}\,\theta = t,$$

$\alpha'-\alpha$ étant $=\theta$, quantité connue : on en tire

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{tc^2 \pm \sqrt{(tc^2)^2-(2AB)^2}}{2A^2}.$$

On examinera le cas du triangle isoscèle et celui du triangle équilatéral.

Problème IX. *Si l'on divise* (fig. 188) *en un même nombre de parties égales, deux droites* AB, AC, *faisant entr'elles un angle quelconque; puis si l'on joint successivement tous les points de division de la première droite, en commençant par* B, *avec tous les points de la seconde, en commençant par* 1, *les intersections de deux droites prises dans l'ordre de ce tracé, seront sur une courbe parabolique.*

Joignons les points B et C : soient A l'origine des coordonnées; la droite AY, parallèle à BC, l'axe des ordonnées; la droite AH joignant A avec le milieu H de BC, l'axe des abscisses : désignons par a l'une MM′ des divisions égales de AB; par b l'une mm' des divisions égales de AC; par n le nombre des parties égales de AB et BC : soient enfin $AH=p$, $BH=HC=q$. Il s'agit donc de prouver que l'intersection N des deux droites Mm, $M'm'$ est sur une parabole. Si z compte le nombre des divisions contenues dans AM, on aura

$$AM = az, \qquad MB = (n-z)\,a,$$
$$Am = (n-z+1)\,b, \quad mC = (z-1)\,b.$$

Les triangles semblables AMP, ABH donnent

$$AP = \frac{pz}{n}, \quad PM = \frac{qz}{n},$$
$$Ap = \frac{p\,(n-z+1)}{n}, \quad pm = \frac{q\,(n-z+1)}{n};$$

on trouve de la même manière,

$$\mathrm{AM}' = (z+1)\,a\,,\quad \mathrm{M'B} = (n-z-1)\,a,$$
$$\mathrm{A}m' = (n-z)\,b\,,\quad m'\mathrm{C} = bz\,,$$
$$\mathrm{AP}' = \frac{p\,(z+1)}{n},\quad \mathrm{P'M}' = \frac{q\,(z+1)}{n},$$
$$\mathrm{A}p' = \frac{p\,(n-z)}{n},\quad p'm' = \frac{q\,(n-z)}{n}.$$

L'équation de Mm sera

$$y-\frac{qz}{n} = \frac{q\,(n+1)}{p\,(2z-n-1)}\left(x-\frac{pz}{n}\right);$$

celle de M$'m'$ sera

$$y-\frac{q(z+1)}{n} = \frac{q\,(n+1)}{p\,(2z-n+1)}\left(x-\frac{p\,(z+1)}{n}\right);$$

éliminant z entre ces deux équations, on obtient une relation entre les coordonnées x et y du point de rencontre, qui parce qu'elle est indépendante de z, a lieu entre les coordonnées des intersections de toutes les droites menées comme celles que nous venons de considérer : cette relation est

$$pny^2 - 2q^2\,(n+1)\,x + pq^2(n+2) = 0.$$

Posant

$$x = x' + \frac{p\,(n+2)}{2\,(n+1)},$$

on trouve la réduite

$$y^2 = \frac{2q^2\,(n+1)}{pn},$$

qui est l'équation d'une parabole rapportée à un système de diamètres conjugués.

Problème X. *Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base* AB *est donnée* (fig. 189), *et dont les deux angles* DAB, DBA *sur cette base, ont une différence donnée et constante.*

Soient $AB = 2c$, A l'origine, AB l'axe des abscisses, et les axes rectangulaires, k la différence des angles, et t sa tangente. D'après l'énoncé, on a

$$A - B = k, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{a + a'}{1 - aa'} \quad \text{et} \quad a' = \frac{t - a}{ta + 1},$$

a' étant la tangente de l'angle DBX, et a celle de l'angle DAX : on a donc

$$y = ax, \quad y = \frac{t - a}{ta + 1}(x - 2c),$$

pour équations des droites AD, ED : éliminant a, on trouve

$$y^2 + \frac{2}{t}yx - x^2 + 2cx - \frac{2c}{t}y = 0,$$

équation d'une hyperbole équilatère, qu'on peut transformer dans celle-ci,

$$y'^2 + \frac{2}{t}x'y' - x'^2 + c^2 = 0:$$

rapportée à ses asymptotes, cette courbe a pour équation

$$xy = -\frac{tc^2}{2\sqrt{1 + t^2}}.$$

[Voyez la solution donnée (probl. XI, chap. XIII)].

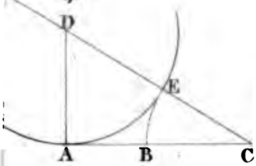
Nous aurions pu multiplier ces sortes de questions ; mais nous n'aurions fait qu'ajouter, peut-être sans fruit pour le lecteur, quelques pages de plus à cet ouvrage déjà trop volumineux : nous laisserons donc aux Professeurs qui voudront bien en faire le texte de leurs leçons, le soin d'étendre utilement ces additions.

FIN DES ADDITIONS.

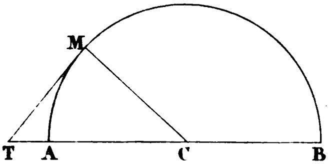
TABLE DES CHAPITRES.

FIN DE LA TABLE.

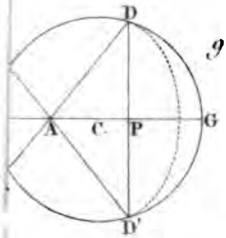
4.



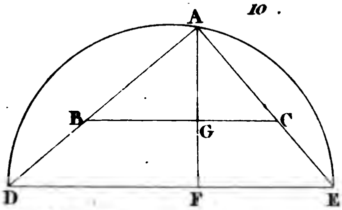
5.



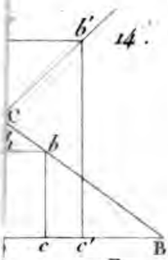
9.



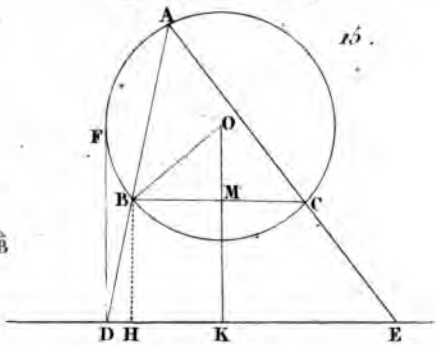
10.



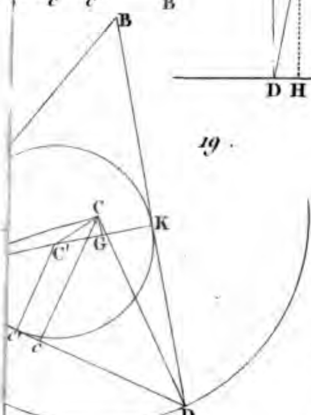
14.



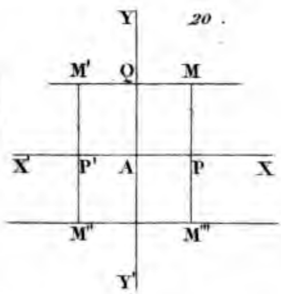
15.

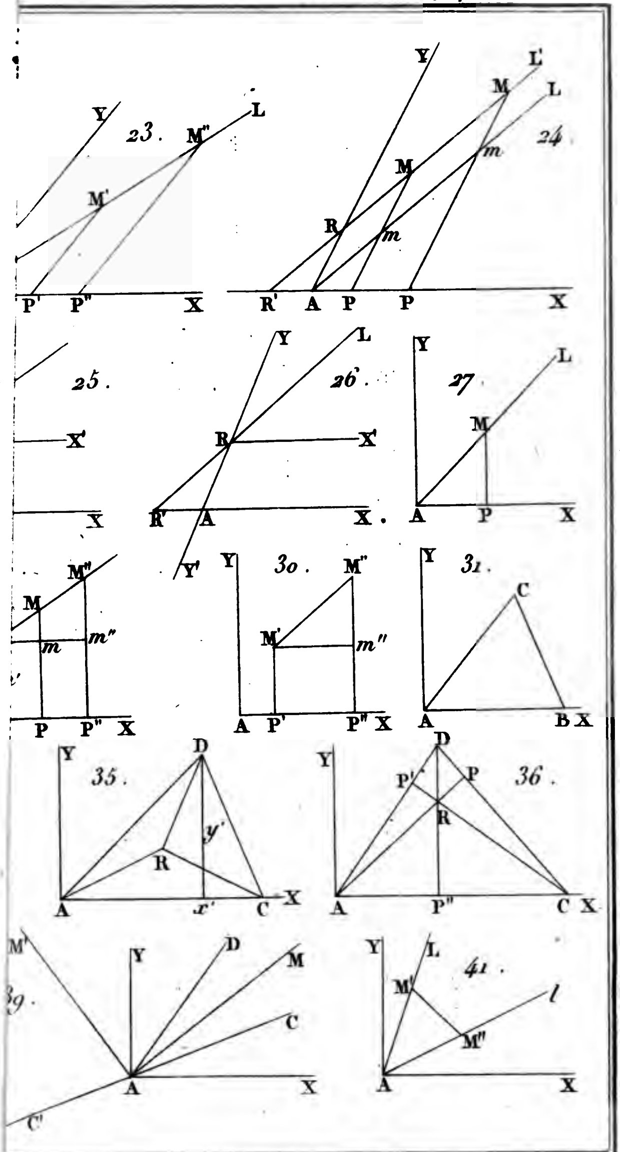


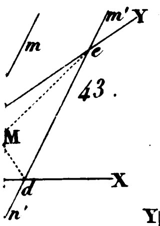
19.



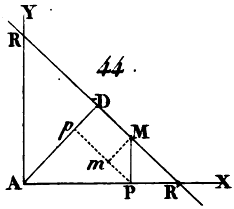
20.



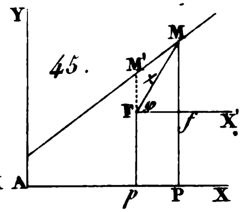

23.
Y
L
M''
M'
P'
P''
X
24.
Y
L'
L
M
m
M
R
m
R'
A
P
P
X
25.
X'
X
26.
Y
L
R
X'
R'
A
X
Y'
27.
Y
L
M
A
P
X
M''
M
m
m''
P
P''
X
30.
Y
M''
M'
m''
A
P'
P''
X
31.
Y
C
A
B
X
35.
Y
D
y'
R
A
x'
C
X
36.
Y
D
P'
P
R
A
P''
C
X
39.
M'
Y
D
M
C
A
X
C'
41.
Y
L
M'
l
M''
A
X


m'
Y
m
e
M
d
n'
X

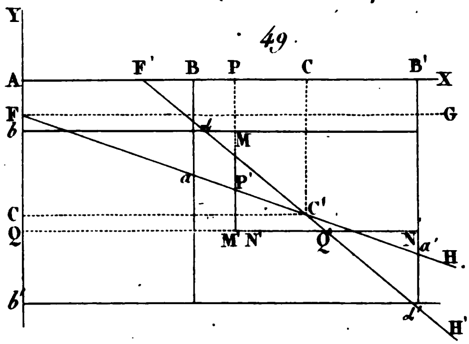
43.


Y
R
D
p
M
m
A
P
R'
X

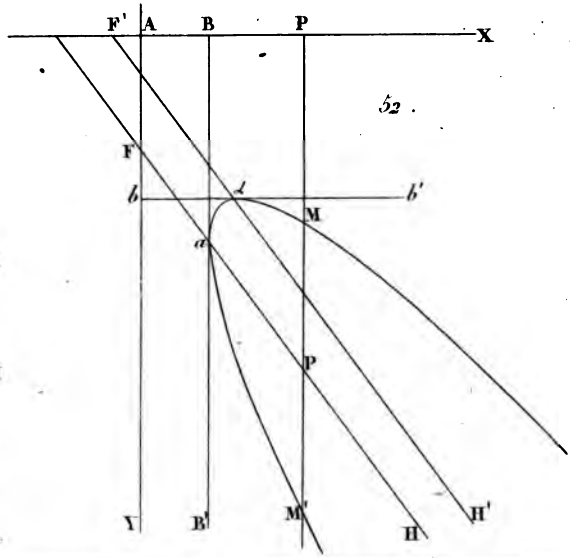
44.


Y
M
M'
x
F
φ
f
X'
A
p
P
X

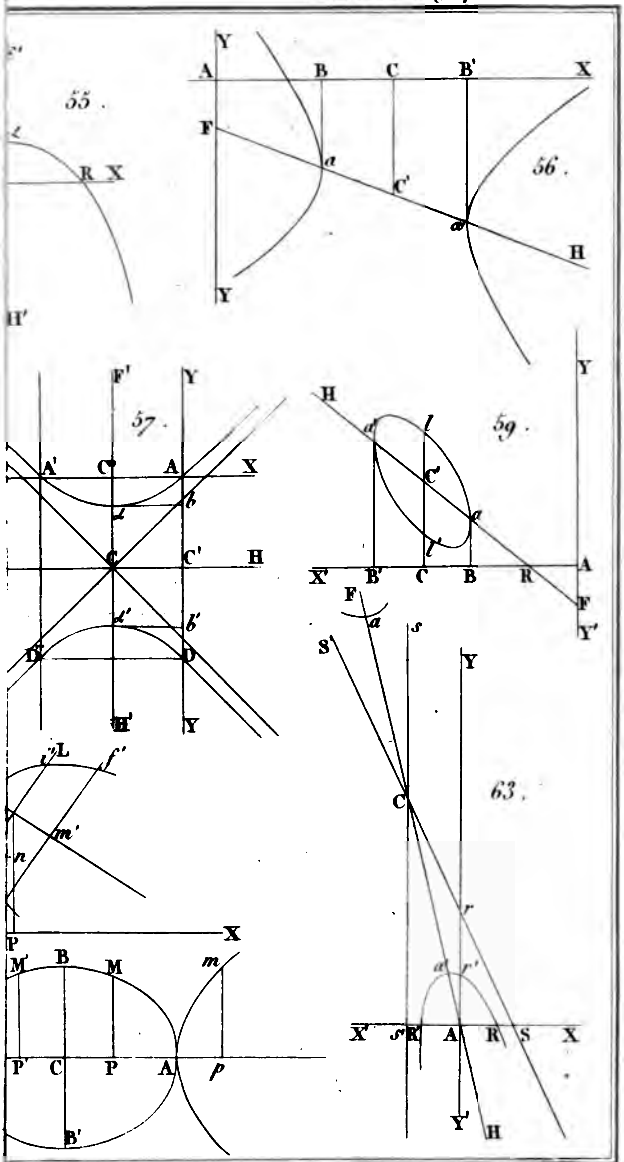
45.


Y
A
F'
B
P
C
B'
X
F
G
b
d
M
a
P'
C
C'
Q
M'
N'
Q'
N
a'
H
b'
d'
H'

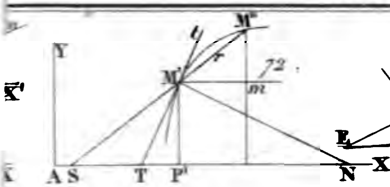
49.


F'
A
B
P
X
F
b
d
b'
M
a
P
Y
B'
M'
H
H'

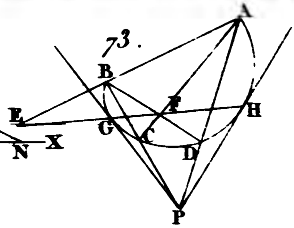
52.


55.
56.
57.
59.
63.

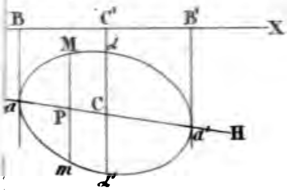
72.



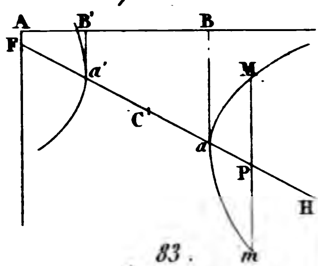
73.



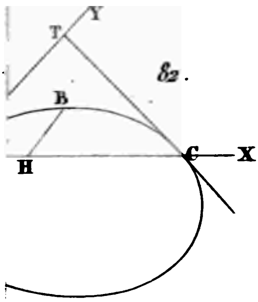
77.



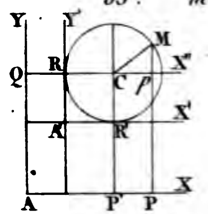
78.



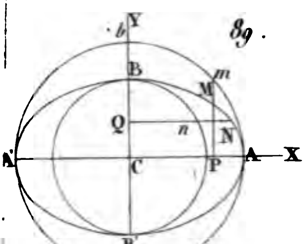
82.



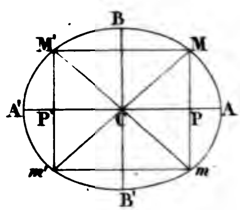
83.

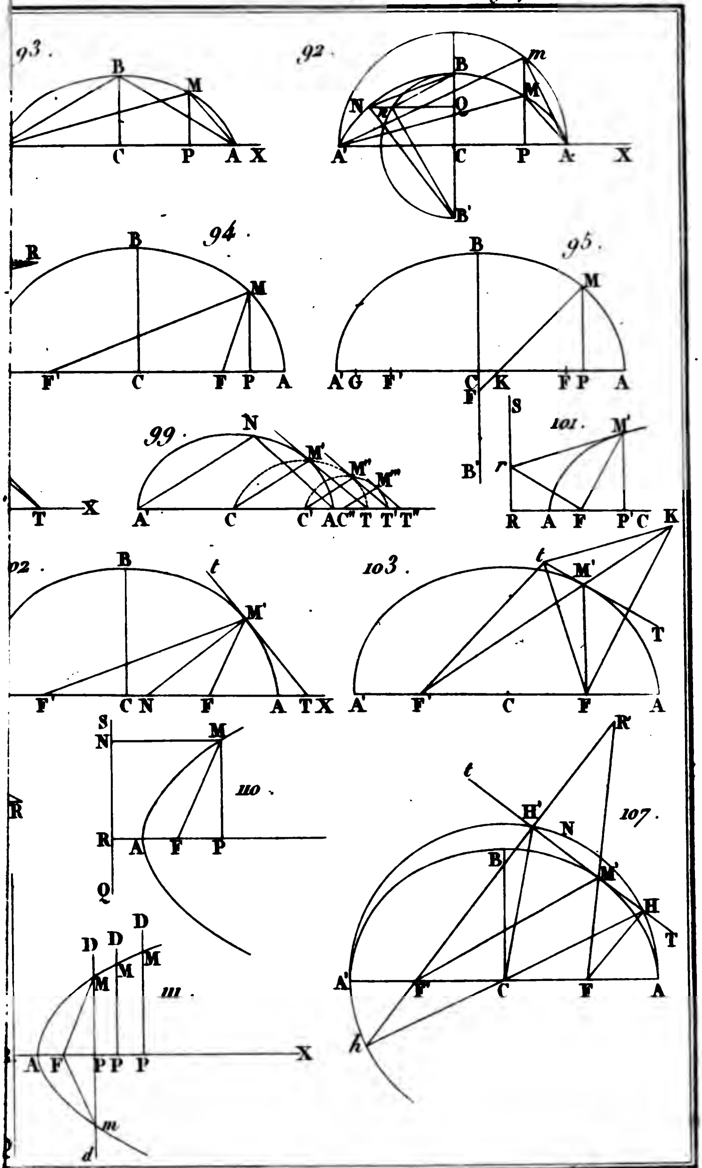


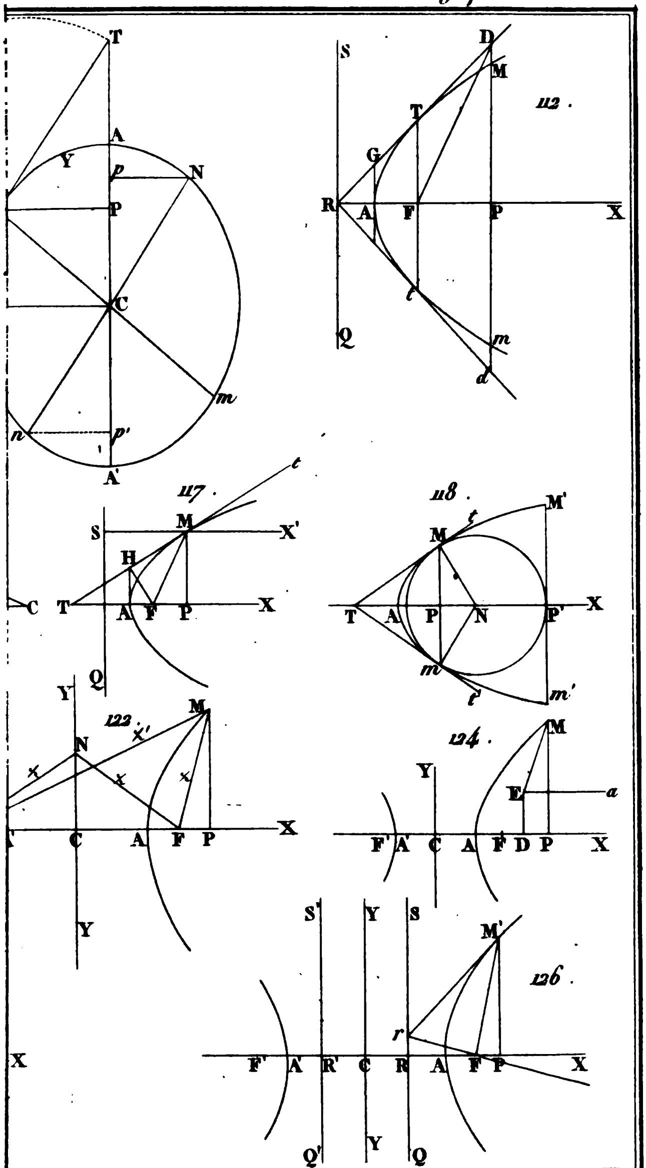
89.

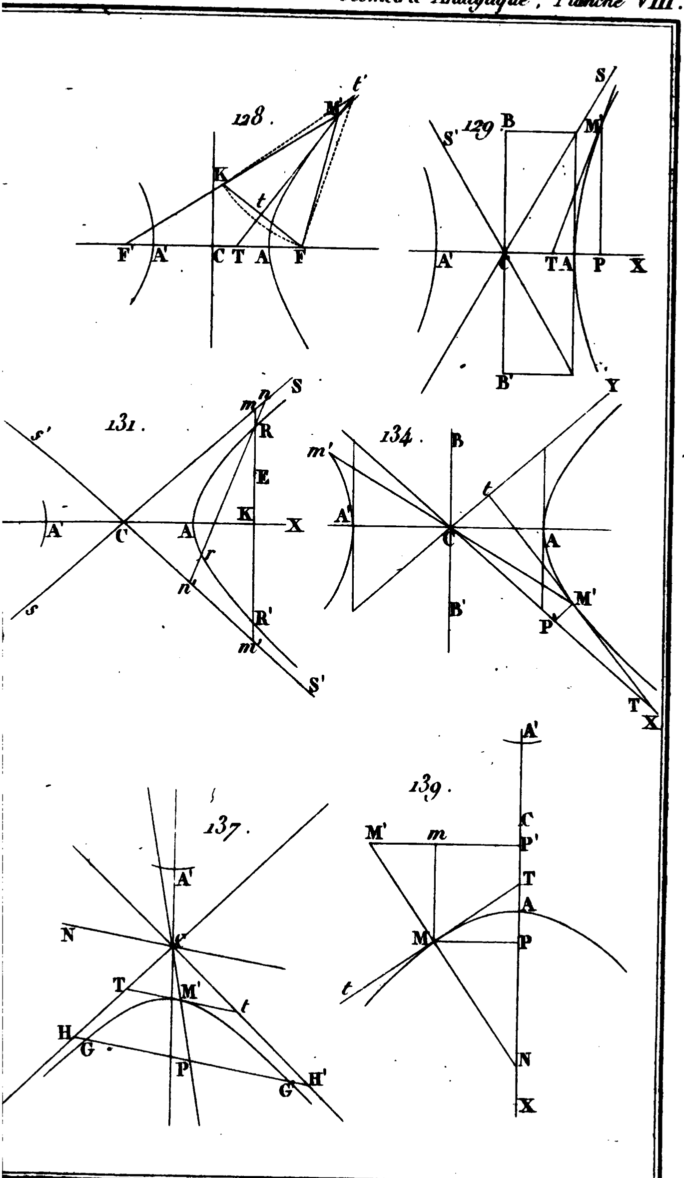


90.

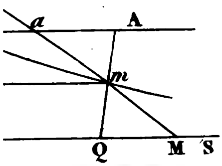



93.
92.
94.
95.
99.
101.
102.
103.
110.
107.
111.

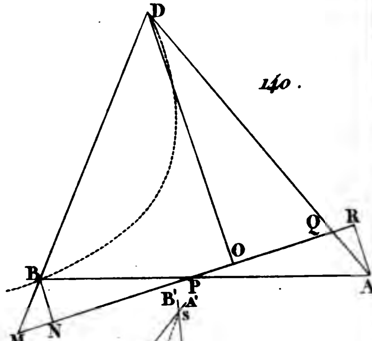

112.
117.
118.
122.
124.
126.

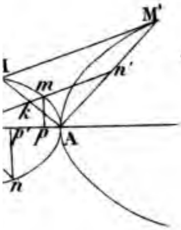

128.
t'
M
K
t
F'
A'
C
T
A
F
129.
S
S'
B
M
A'
C
T
A
P
X
B'
Y
131.
n
S
m
s'
R
E
K
X
A'
C
A
r
n'
s
R'
m'
S'
134.
m'
B
t
A'
C
A
B'
M'
P'
T
X
137.
A'
N
C
T
M'
t
H
G
P
G'
H'
139.
A'
C
M'
m
P'
T
A
M
P
t
N
X

138.

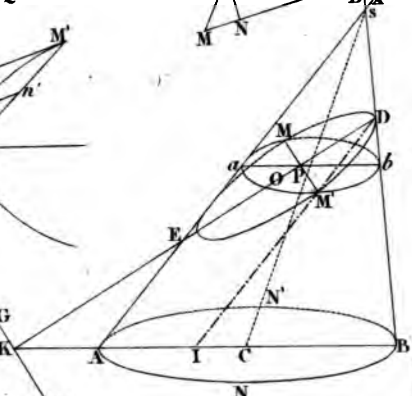


140.

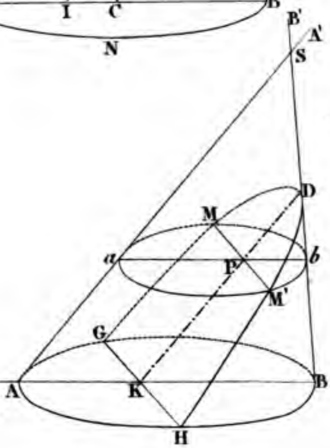




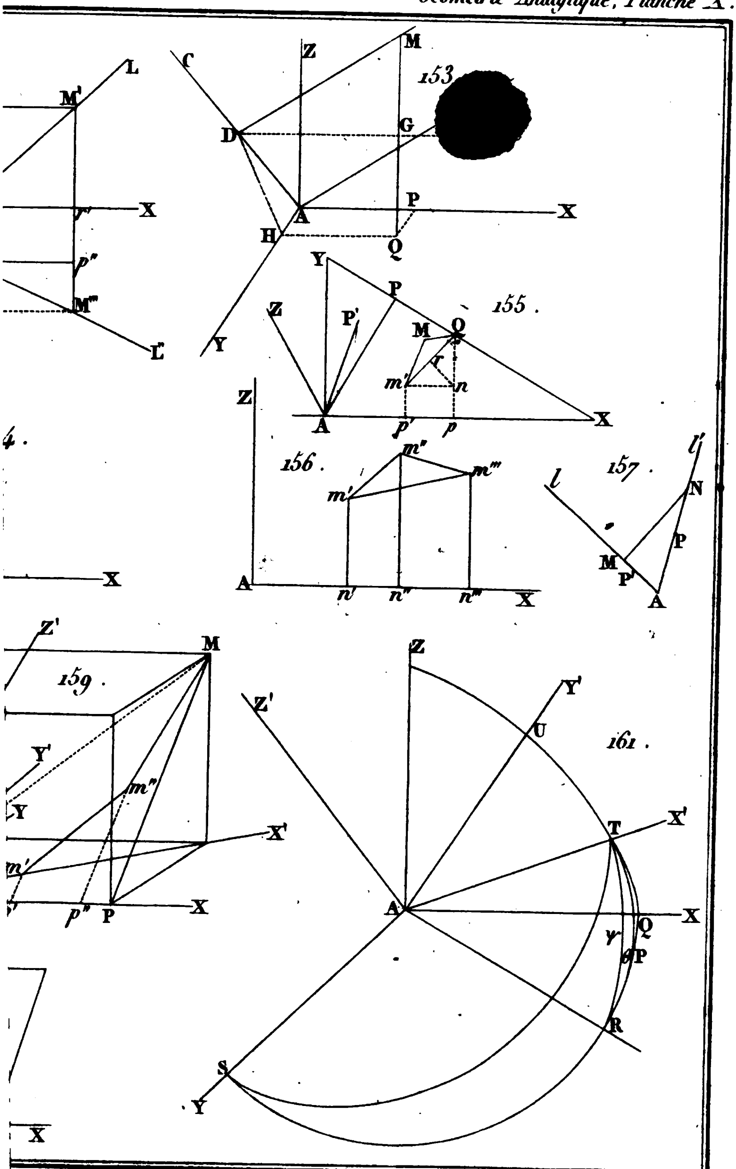
145.

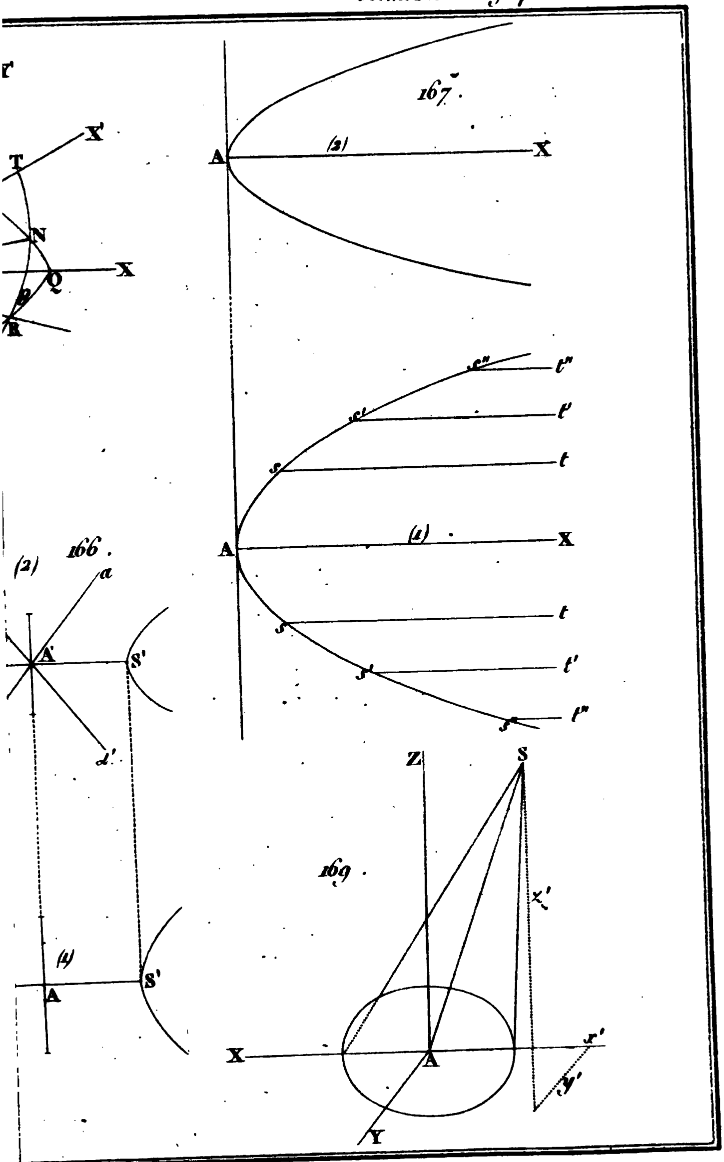


146.

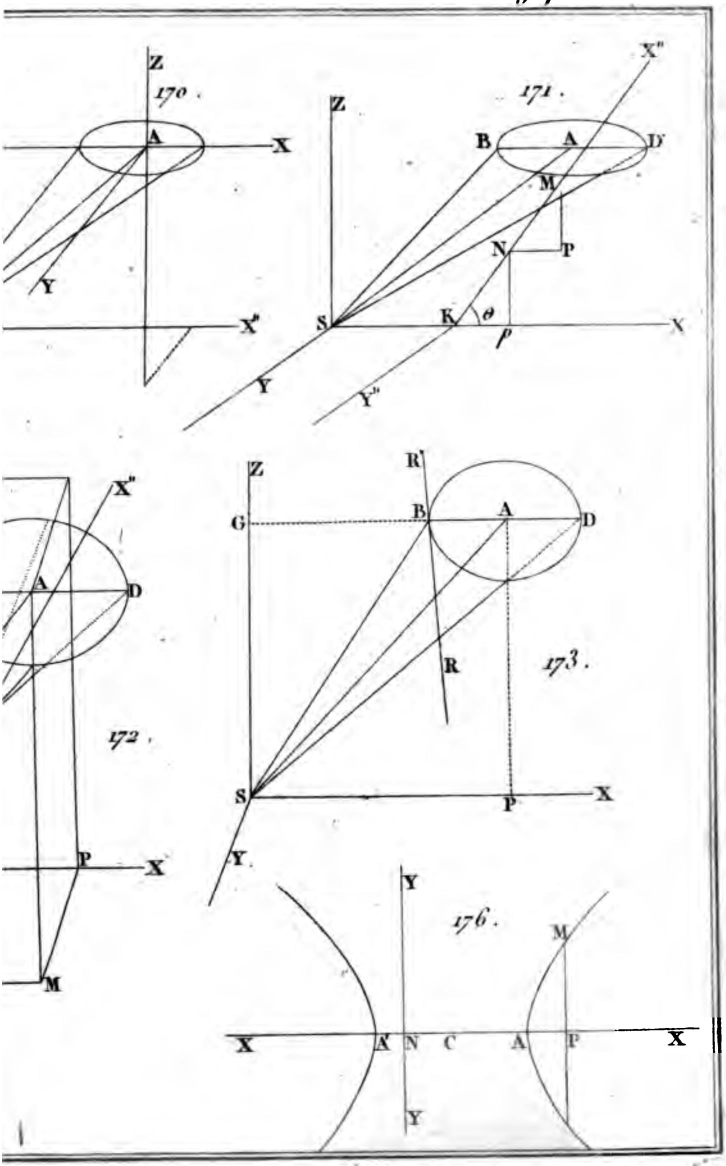


147.


153.
155.
4.
156.
157.
159.
161.



UNIV


170.
Z
A
X
Y
X'
171.
X''
Z
B
A
D
M
N
P
S
K
θ
X
p
Y
Y''
172.
X''
A
D
P
X
M
173.
Z
R'
G
B
A
D
R
S
P
X
Y.
176.
Y
M
X
A'
N
C
A
P
X
Y